第13卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 3
1993年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1993

满足 $\mathrm{Cond}_l(A)=1\ (l=1,\infty)$ 的矩阵 A 的充要条件*

陈果良　　王成
(华东师范大学数学系，上海 200062)

摘　要

本文导出了长方矩阵 A 的条件数 $\mathrm{Cond}_l(A)=\|A\|_l\|A^+\|_l=1(l=1,\infty)$ 的充要条件；而且给出了 $\mathrm{Cond}_l(A)=1$ 时 A 的矩阵结构和元素结构形式；同时指出文[6]中两个主要定理的错误.

一　引　言

近年来，矩阵或算子的各类条件数达极小问题被得到广泛地研究[1-7]. 对于非奇异方阵在各种范数意义下达极小性质已被完全解决[1-4]. 对长方矩阵，[5]利用奇异值分解性质，得到谱条件数达极小的充要条件. 除谱范数外，1(或∞)范数是一类很重要的范数，这类范数在理论研究中有特殊意义且在实际应用中使用简便方便. 文[6]讨论了在列(或行)满秩情况下，在1(或∞)范数意义下的条件数达极小性质. 由于[6]作者的疏忽，文[6]中所得两个主要定理仅对一半，而另一半则是错误的.

本文考虑任意长方矩阵 A(不必是列满或行满秩)，导出 $\mathrm{Cond}_l(A)=1(l=1,\infty)$ 的充要条件，同时给出此时 A 的矩阵结构和元素结构形式. 而且指出文[6]的错误，给出了反例. 由于1(或∞)范数是 Banach 空间范数，因而不能用 Hilbert 空间的特性(如内积，奇异值分解等性质)，故有关结果的证明难度要远大于谱范数的情形.

二　概念和引理

首先给出一些概念. 设 $x\in C^n$，则 $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 和 $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$ 分别称为向量 x 的1范数和∞范数. 另设 $A\in C^{m\times n}$，$l=1,\infty$，则称 $\|A\|_l=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_l}{\|x\|_l}=\max_{\|x\|_l=1}\|Ax\|_l$ 分别为 A 的 $l(l=1,\infty)$ 范数. 记 $\mathrm{rank}A$ 为 A 的秩，$R(A)$ 和 $N(A)$ 分别为 A 的值域和零空间，记 $R(A)^\perp$ 为 $R(A)$ 的补空间，易知 $R(A)^\perp=N(A^*)$，其中 A^* 为 A 的共轭转置阵. 记 e_j 为第 j 个分量为1，其余分量为0的单位向量. 若 $A\in C^{m\times n}$，$\forall\ x\in C^n$，有 $\|Ax\|_l=\|x\|_l$，则称 A 为 $l(l=1,\infty)$ 等距阵.

* 1991年4月9日收到. 1993年5月13日收到修改稿.

设 $A\in C_n^{m\times n}$，若 $\forall\ u\in R(A), V\in R(A)^{\perp}$，有

$$\| u \|_l \leqslant \| u+v \|_l, \quad l=1,\infty, \tag{1}$$

则称列满秩矩阵 A 满足条件(1). 下面给出若干个引理.

引理 1[8] 若 $A\in C_n^{m\times n}$，则存在置换阵 $P\in C^{m\times m}$，非奇异阵 $X\in C^{n\times n}$，使

$$PAX=\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix}_{m\times n}, \tag{2}$$

其中 $K=(k_{ij})_{(m-n)\times n}$，$|k_{ij}|\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant m-n, 1\leqslant j\leqslant n$.

引理 2 设 $A\in C_n^{m\times n}$，P 为 m 阶置换阵，则 A 满足条件(1)当且仅当 PA 满足条件(1). 即 $\forall\ u\in R(A), V\in R(A)^{\perp}$，$\| u\|_l\leqslant \|u+v\|_l$ 当且仅当存在置换阵 P，$\forall\ u\in R(PA), V\in R(PA)^{\perp}$ 有 $\|u\|_l\leqslant\|u+v\|_l$.

证明 因为置换阵 P 不改变 $l(l=1,\infty)$ 范数，即证. #

引理 3[2] 设 $A\in C_n^{n\times n}$，则 $\| A\|_\infty \| A^{-1}\|_\infty=1$ 当且仅当存在置换阵 $Q\in C^{n\times n}$，对角阵 $\hat{D}=\mathrm{diag}(d_{11},\cdots,d_{nn})$，$d_{ii}=\pm 1$ 或 $\pm i$. 使得

$$A=C\hat{D}Q \text{ 和 } A^{-1}=\frac{1}{C}Q^*\hat{D}^{-1}Q^*. \tag{3}$$

引理 4 设 $A\in C_n^{m\times n}(n\leqslant m)$ 且满足条件(1)，则存在置换阵 $P\in C^{m\times m}$，非奇异方阵 $X\in C^{n\times n}$，使得 PAX 的每一行至多有一个非零元.

证明 因为 $A\in C_n^{m\times n}$，由引理 1 知，$PAX=\begin{pmatrix} I_n \\ K\end{pmatrix}$，$K$ 的结构如同(2). 所以 $R(PA)=R(PAX)=R\left(\begin{pmatrix} I_n \\ K\end{pmatrix}\right)$，则有

$$R(PA)^{\perp}=R\left(\begin{pmatrix} I_n \\ K\end{pmatrix}\right)^{\perp}=R\left(\begin{pmatrix} -K^* \\ I_{m-n}\end{pmatrix}\right). \tag{4}$$

下面分两步证明引理 4 的结论.

1) 若 $|K_{i_0j_0}|<1$，则 $K_{i_0j_0}=0, 1\leqslant i_0\leqslant m-n, 1\leqslant j_0\leqslant n$. 倘若不然，选取

$$\begin{cases} u=\begin{pmatrix} I_n \\ K\end{pmatrix}e_{j_0}=\begin{bmatrix} e_{j_0} \\ K_{j_0}\end{bmatrix}\in R(PA) \\ v=-\varepsilon\begin{pmatrix} -K^* \\ I_{m-n}\end{pmatrix}(Ce_{i_0}+K_{j_0})\in R(PA)^{\perp}\end{cases}, \tag{5}$$

这儿 C 是常数，使 $CK_{i_0j_0}+K_{j_0}^*K_{j_0}<0$；$\varepsilon>0$ 为充分小的数. 由 u 的选择(5)知 $\|u\|_\infty=1$，和

$$u+v=\begin{bmatrix} e_{j_0} \\ K_{j_0}\end{bmatrix}-\varepsilon\begin{pmatrix} -K^* \\ I_{m-n}\end{pmatrix}(Ce_{i_0}+K_{j_0})=\begin{bmatrix} e_{j_0}+\varepsilon K^*(Ce_{i_0}+K_{j_0}) \\ K_{j_0}-\varepsilon(ce_{i_0}+K_{j_0})\end{bmatrix}. \tag{6}$$

令 $w=u+v=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$，我们要证明 $|w_i|<1$，需要分下面四种情形讨论.

(a) 当 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $i\neq j_0$ 时，$w_i=\varepsilon e_i^T K^*(Ce_{i_0}+K_{j_0})=\varepsilon K_i^*(Ce_{i_0}+K_{j_0})=\varepsilon(CK_{ii_0}+K_i^*K_{j_0})$. 由 $\varepsilon>0$ 充分小可知 $|w_i|<1$.

(b) 当 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $i=j_0$ 时，$w_i=1+\varepsilon e_{j_0}^T K^*(Ce_{i_0}+K_{j_0})=1+\varepsilon(CK_{i_0j_0}+K_{j_0}^*K_{j_0})$，由 C 的选取知 $CK_{i_0j_0}+K_{j_0}^*K_{j_0}<0$，再由 $\varepsilon>0$ 充分小即知 $|w_i|<0$.

(c) 当 $n+1\leqslant i\leqslant m$ 且 $i\neq n+i_0$ 时，$w_i=K_{ij_0}(1-\varepsilon)$，故 $|w_i|<1$.

(d) 当 $n+1\leqslant i\leqslant m$ 且 $i=n+i_0$ 时，$w_i=K_{i_0j_0}-\varepsilon(C+K_{i_0j_0})=K_{i_0j_0}(1-\varepsilon)+\varepsilon C$，因为 $|K_{i_0j_0}|<1$ 及 $\varepsilon>0$ 充分小知 $|w_i|<1$.

由(a)—(d)知，$\|w\|_\infty=\|u+v\|_\infty<1=\|u\|_\infty$，这矛盾于 A 满足条件(1).

2) K 的每一行至多有一个非零元. 倘若不然，存在 K 的某二列 K_{j_1},K_{j_2} 使得 $|K_{i_0j_1}|=|K_{i_0j_2}|=1$，$1\leqslant i_0\leqslant m-n$. 选取

$$u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}(e_{j_1}\pm e_{j_2})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e_{j_1}\pm e_{j_2}\\K_{j_1}\pm K_{j_2}\end{bmatrix}\in R(PA), \tag{7}$$

其中 $|K_{i_0j_1}\pm K_{i_0j_2}|=2$. 由 u 的选取(7)知 $\|u\|_\infty=1$. 再选取 $v=-\varepsilon\begin{pmatrix}-K^*\\I_{m-n}\end{pmatrix}(K_{j_1}\pm K_{j_2})\in R(PA)^\perp$，$\varepsilon>0$ 为充分小. 这样

$$u+v=\begin{bmatrix}(e_{j_1}\pm e_{j_2})/2+\varepsilon K^*(K_{j_1}\pm K_{j_2})\\(1-2\varepsilon)(K_{j_1}\pm K_{j_2})/2\end{bmatrix}. \tag{8}$$

由 $\varepsilon>0$ 充分小及(8)式知，$\|u+v\|_\infty<1=\|u\|_\infty$，这又矛盾于 A 满足条件(1). 综合 1)和 2)，引理 4 证毕. #

易知一个模为 1 的复数可表为 $e^{i\theta}$，$i^2=-1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，进而有 $\overline{e^{i\theta}}e^{i\theta}=1$. 对 $e^{i\theta}$，总可找到 $e^{i\sigma}$ 使 $e^{i\theta}e^{i\sigma}=1$，σ 在$[0,2\pi]$内. 由此我们可得如下

引理 5 设 $A\in C_n^{m\times n}$ 且每一行至多只有一个模为 1 的非零元，则必存在置换阵 $P\in C^{m\times m}$，对角阵 $D\in C^{n\times n}$，使得

$$PAD=\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}, \tag{9}$$

这儿

$$K=\begin{bmatrix}e^{i\sigma_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{i\sigma_{1s_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{i\sigma_{21}} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & e^{i\sigma_{2s_2}} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & & e^{i\sigma_{n1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & & e^{i\sigma_{ns_n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}_{(m-n)\times n}, \tag{10}$$

而 $i^2=-1$，$0\leqslant\sigma_{i,i_j}\leqslant 2\pi$，$1\leqslant j\leqslant s_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，$\sum_{i=1}^{n}s_i\leqslant m-n$，

$$D=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})=\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n}),\ i^2=-1,0\leqslant\theta_i\leqslant 2\pi. \tag{11}$$

证明 因为 A 是列满秩且每行至多有一个模为 1 的非零元，故 P 左乘 A 起调行作用，再

用(11)中 D 右乘 PA,实际作用是将 PA 的上半部分化为单位阵 I_n. 故引理 5 证毕. #

引理 6 设 K 和 D 分别形如(10)和(11),则

(1) $\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D$ 是一个∞等距矩阵;

(2) $\left(\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D\right)^+ = D'(I_n, K^*)$ 且 $\| D'(I_n, K^*) \|_\infty = 1$,其中

$$D' = \operatorname{diag}(d'_{11}, d'_{22}, \cdots, d'_{nn}), d'_{jj} = d_{jj}(1 + s_1)^{-1}, 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{12}$$

证明 (1) $\forall\, x \in C^n$,由 $\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix}$ 和 D 的形式(9)(10)(11)知 $\left\| \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} Dx \right\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{ |d_{jj}| |x_j| \} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{ |x_j| \} = \| x \|_\infty$,故 $\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D$ 为∞等距矩阵.

(2) 因 $\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix}$ 列满秩,故 $\left(\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D\right)^+ = D^{-1}\left[(I_n, K^*)\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix}\right]^{-1}(I_n, K^*) = D^{-1}(I_n + K^*K)^{-1}(I_n, K^*)$,因为 $(I_n + K^*K) = \operatorname{diag}(1+s_1, 1+s_2, \cdots, 1+s_n)$,故 $(I_n + K^*K)^{-1} = \operatorname{diag}((1+s_1)^{-1}, (1+s_2)^{-1}, \cdots, (1+s_n)^{-1})$ 令 $D' \stackrel{\triangle}{=} D^{-1}(I_n + K^*K)^{-1} \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{diag}(d'_{11}, d'_{22}, \cdots, d'_{nn})$,所以 $d'_{jj} = d_{jj}(1+s_j)^{-1}$. 而且易知 $\| D'(I_n, K^*) \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D' \right\|_1 = 1$. #

三 主要结果

定理 1 设 $A \in C_n^{m \times n}$,则如下命题等价

(a) $\operatorname{Cond}_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^+ \|_\infty = 1$

(b) $A = CP^* \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} DQ$,其中 C 是常数,P 和 Q 分别为 m 和 n 阶置换阵,K 和 D 分别如同(10)和(11).

(c) A 的每一行至多只有一个非零元,且所有非零元的模相等.

证明 (a)⇒(b) 不妨设 $\| A \|_\infty = \| A^+ \|_\infty = 1$(否则令 $A' = A / \| A \|_\infty$). 由[8, Ch2, § 4]知,AA^+ 是 R^m 到 $R(A)$ 上投影. 当 $y \in R^m$,有 $AA^+ y = y \Leftrightarrow y \in R(A)$. 所以$\forall\, u \in R(A), V \in R(A)^\perp$, $u = AA^+(u+v)$. 故

$$\| u \|_\infty = \| AA^+(u+v) \|_\infty \leqslant \| A \|_\infty \| A^+ \|_\infty \| u + v \|_\infty = \| u + v \|_\infty. \tag{13}$$

由 $\operatorname{rank} A = n$ 和(13)知 A 满足条件(1). 再由引理 4,5 知,存在置换阵 $P \in C^{m \times m}$,非奇异阵 $X_1 \in C^{n \times n}$,使得 $PAX_1 = \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix}$. 令 D 如同(11),D' 如同(12)表示,这时 $X = X_1 D \in C_n^{n \times n}$,从而有

$$PAX_1 D = PAX = \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D \text{ 或 } A = P^* \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} DX^{-1}. \tag{14}$$

由引理 6 知,

$$A^+ = X\left(\begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D\right)^+ P = XD'(I_n, K^*)P. \tag{15}$$

从(14)(15)中可解出非奇异阵 X 和 X^{-1} 的表达式为: $X = A^+ P^* \begin{pmatrix} I_n \\ K \end{pmatrix} D$ 和 $X^{-1} = D'(I_n, K^*)PA$.

再由定理 6 得 $\|X\|_\infty=\|A^+P^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}D\|_\infty\leqslant\|A^+\|_\infty\|P^*\|_\infty\|\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}D\|_\infty=\|A^+\|_\infty$和 $\|X^{-1}\|_\infty=\|D'(I_n,K^*)PA\|_\infty\leqslant\|D'(I_n,K^*)\|_\infty\|P\|_\infty\|A\|_\infty=\|A\|_\infty$,所以有 $\|X\|_\infty\cdot\|X^{-1}\|_\infty\|\leqslant\|A\|_\infty\|A^+\|_\infty=1$ 从而 $\|X\|_\infty\|X^{-1}\|_\infty=1$ 再由引理 3 知,$X^{-1}=C\hat{D}Q$,其中 Q 为 n 阶置换阵,$\hat{D}$ 是对角元为±1 或±i 的对角阵. 最后有 $A=P^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}DX^{-1}=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}D\hat{D}Q=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}\bar{D}Q$,这儿 $\bar{D}$ 仍为(11)形式. 故(a)⇒(b)成立.

(b)⇒(c) 因为 $A=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}DQ$. 由 P、Q 为置换阵及 D、K 的结构知,A 的每一行至多有一个非零元. 下面证明每个非零元的模相等. 任取 A 的一列 Ae_j $(1\leqslant j\leqslant n)$,因为 Q 是置换阵,所以 $Qe_j=e_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,则

$$Ae_j=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}DQe_j=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}De_k=CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}\begin{bmatrix}d_{11}&&\\&\ddots&\\&&d_{nn}\end{bmatrix}e_k$$

$$=d_{kk}CP^*\begin{pmatrix}I_n\\K\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=Ce^{i\theta_k}P^*\left[\begin{array}{c}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\\e^{i\sigma_{k1}}\\ \\e^{i\sigma_{ks_k}}\\0\\\vdots\\0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\k\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\\end{array}.$$

注意到 Ae_j 的最后一个表达式,且 $|e^{i\theta}|=1$, $|e^{i\sigma_{kj}}|=1$ $(1\leqslant j\leqslant s_k)$. 所以 Ae_j 的每个非零元的模均为 $|C|$.

(c)⇒(a) 由[6]中定理 1 关于列满秩的情形. #

注 1 定理 1 中(b)是 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=1$ 时矩阵 A 的矩阵结构形式,而(c)则是此时 A 的元素结构形式.

注 2 文[6]定理 1 认为当 A 是行满秩时,仍有(c)的结论,这是错误的. 举反例如下,选取 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}\in C_2^{2\times3}$ 是行满秩阵. 则 $A^+=A^*(AA^*)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 显然 $\|A\|_\infty=\|A^+\|_\infty=1$. 故 $\mathrm{Cond}(A)=1$. 但此时 A 的每一行不仅仅是一个非零元. 且非零元的模亦不相同. 关于[6]中产生错误的证明过程限于篇幅不再详述.

定理 2 设 $A\in C_m^{m\times n}$(行满秩),则如下命题等价:

(a) $\mathrm{Cond}(A)=\|A\|_1\|A^+\|_1=1$. (b) $A=CQ^*D^*(I_m,K^*)P$. (c) A 的每一列至多只有一个非零元且所有非零元的模相等.

证明 令 $B=A^*$,再利用定理 1 即得. #

注 3 类似于注 2 中分析，[6]中定理 2 认为当 A 为行满秩时(a)与(c)是等价的结论是错误的.

最后给出一般长方矩阵的结果.

定理 3 设 $A\in C_r^{m\times n}$，$r\leqslant\min(m,n)$，则 $\mathrm{Cond}_l(A)=1$ 当且仅当 $A=FG$ 且 $\|F\|_l\|F^+\|_l=\|G\|_l\|G^+\|_l=1$，其中 $F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$，$l=1$ 或 $l=\infty$.

证明 仅证 $l=\infty$ 情形，当 $l=1$ 时证明是类似的.

充分性 因为 $A\in C_r^{m\times n}$，由 A 的满秩分解定理知 $A=FG$，$F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$ 且 $A^+=G^+F^+$. 从而 $\|A\|_\infty\|A^+\|_\infty=\|FG\|_\infty\|G^+F^+\|_\infty\|\leqslant\|F\|_\infty\|F^+\|_\infty\|G\|_\infty\|G^+\|_\infty=1$. 所以 $\|A\|_\infty\|A^+\|_\infty=1$.

必要性 不妨设 $\|A\|_\infty=\|A^+\|_\infty=1$. 再利用满秩分解定理 $A=FG$，$F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$ 所以 $AA^+=F^+F^+$. 对列满秩阵 F 可验证其满足条件(1)，再由引理 4. 5. 6 可知 $\|F\|_\infty\|F^+\|_\infty=1$. 亦可推导出 $\|G\|_\infty\|G^+\|_\infty=1$.

参 考 文 献

[1] 征道生，矩阵的谱条件数等于 1 的充要条件，华东师大学报(自然科学版) No. 3，1984.

[2] 陈德辉，关于矩阵条件数的一些结论，华东师大学报(自科版) No. 3，1986.

[3] 征道生，矩阵范数的界和方阵的 p 条件数，华东师大学(自科版) No. 3，1986.

[4] 陈果良，两类条件数达极小的进一步研究，华东师大学报(自科版) No. 1，1988.

[5] 王国荣，矩阵伪条件数的一些结果，上海师大学报(自科版) No. 1，1986.

[6] 马国治、袁东锦，矩阵求广义逆条件数达极小的条件，杨州师院学报(自科版) No. 2，1990.

[7] 匡蛟勋、陈果良，关于线性算子的 K — 条件数为极小的一些充要条件，高校计算数学学报 No. 4，1987.

[8] Ben—Israel and T. N. Grevill, *Generalized Inverses; Theory and Application*, John Wiley and Son. New York, 1974.

[9] G. Golub and C. Vao Loan, *Matrix Computation*, Johns Hopking Press. 2nd 1989.

[10] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley, Son. 1980.

The Necessary and Sufficient Conditions of $\mathrm{Cond}_l(A)=1$ $(l=1,\infty)$

Chen Guoliang *Wang Chang*

(East China Normal Univ., Shanghai)

Abstract

This paper derives the necessary and sufficient conditions of $\mathrm{Cond}_l(A)=\|A\|_l\|A^+\|_l=1$, where $A\in C_r^{m\times n}$, $\mathrm{rank}A=r\leq\min(m,n)$, $l=1,\infty$. Moreover when $\mathrm{Cond}_l(A)=1$, it gives the structure of matrix and elements of rectangle matrix A, and it points the mistakes of two main theorems in reference [6].