第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

# Banach空间Teicher强大数定律的一般形式*

杨 小 云
(吉林大学数学系,长春 130023)

## 摘 要

本文研究取值在Banach空间中的随机变量序列的强收敛问题,在假设随机变量序列弱大数定律成立的条件下,证明了一般形式的Teicher强大数定律成立.

## 一、引 言

在实值情况下,文献[1]中给出了由Teicher获得的经典结果:设$\{X_n\}$为相互独立、均值为零的实随机变量序列,如果

(i) $\sum_{i=2}^{\infty}(EX_i^2/i^4)\sum_{j=1}^{i-1}EX_j^2<\infty$;

(ii) $(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2)/n^2\to 0$;

(iii) 存在正常数序列$\{a_n\}$,使得$\sum_{i=1}^{\infty}P\{|X_i|>a_i\}<\infty$和$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^2EX_i^2)/i^4<\infty$,

则$S_n/n\to 0$ a.s. 此处$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

不难看出Teicher定理为Kolmogorov强大数定理的推广.事实上,若取$a_i=i$,则经典的Kolmogorov条件$\sum_{i=1}^{\infty}(EX_i^2)/i^2<\infty$意味着上述(i)—(iii)均成立. Kuelbs, Zinn([2])和de Acosta([3])针对取值在Banach空间中的随机变量序列,在弱大数定律成立的条件下,将经典的Kolmogorov强大数定律进行了若干推广和改进.自然,弱大数定律成立的条件与空间的几何结构密切相关. Szynal和Kuczmaszewska([4])将上述的Teicher强大数定律推广到特殊的$B$空间——Hilbert空间.

本文将利用某一适用于$B$值随机变量的鞅差不等式推广上述领域中的若干结果到可分Banach空间,同时作出一些改进,以期得到更为一般性的结果.我们还将讨论Teicher型强收敛问题和Banach空间几何结构之间的关系.特别指出的是,实值情形的Teicher定理的处理手法不适应于$B$值情形.

* 1991年4月26日收到.

## 二、 主要结果及证明

以下总假设 $B$ 为具有范数 $\|\cdot\|$ 的可分 Banach 空间，$C$ 均表示正的常数，且在不同之处可以表示不同的值，即使在同一表达式中也是如此.

在介绍主要结果之前，先给出下列若干引理.

**引理** 1([5]引理 3.3) 设 $\{a_n\}$ 为一递增的正实数序列，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，则对任意的 $M>1$，均存在 $\{n_k\}\subset N$($N$ 为自然数集)，使下式成立

$$Ma_{n_k}\leqslant a_{n_{k+1}}\leqslant M^3a_{n_k+1}(k=1,2,\cdots).$$

**引理** 2([6]P.155) 设 $\{X_i;1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $B$ 中相互独立的随机变量，并且 $E\|X_i\|<\infty(1\leqslant i\leqslant n)$；设 $\mathscr{F}_i$ 为由 $\{X_1,\cdots,X_i\}$ 所产生的 $\sigma$—代数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\mathscr{F}_0$ 为平凡 $\sigma$—代数，则对 $1\leqslant i\leqslant n$，有

$$|E(\|\sum_{k=1}^{n}X_k\|\,|\mathscr{F}_i)-E(\|\sum_{k=1}^{n}X_k\|\,|\mathscr{F}_{i-1})|\leqslant\|X_i\|+E\|X_i\|. \tag{1}$$

**引理** 3 设 $\{X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为实随机变量，并且对某个 $p>1$ 有 $X_i\varepsilon L^p(1\leqslant i\leqslant n)$；$\{\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $\sigma$—代数，并且 $\mathscr{F}_i\subset\mathscr{F}_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n-1)$，如果 $\{X_i,\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为一鞅差序列，则对任意的 $1\leqslant q\leqslant 2$，有

$$E\sum_{i=1}^{n}|X_i|^p\leqslant CE\sum_{i=1}^{n}(|X_i|^q)^{p/q} \tag{2}$$

成立，此处 $C$ 为一仅依赖于 $p$ 的正常数.

**证明** 令 $Y_i=\sum\limits_{k=1}^{i}X_k,1\leqslant i\leqslant n$，则 $\{Y_i,\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为一鞅序列([1]PP30—31)，于是对 $\{Y_i,\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 应用 Burkholder 不等式([1]P.149)便有

$$E|Y_n|^p\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n}E|Y_i|^p\leqslant CE(\sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y_{i-1})^2)^{p/2}=CE(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)^{p/2},$$

其中 $Y_0=0$，$C$ 为仅依赖于 $P$ 的正常数，再应用[7]中引理 6.1.1 便知(2)式成立. 引理证毕.

**定理** 1 设 $\{X_n\}$ 为相互独立的 $B$ 值随机变量序列，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；$\{a_n\}$ 为一单调不减的正实数序列，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$；$1\leqslant p\leqslant 2$，如果

(i) $\sum\limits_{i=2}^{\infty}(E\|X_i\|^p/a_i^{2p})\sum\limits_{j=1}^{i-1}E\|X_j\|^p<\infty$；

(ii) $(\sum\limits_{i=1}^{n}E\|X_i\|^p)/a_n^p\to 0$；

(iii) 存在正实数序列 $\{b_n\}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{\|X_i\|>b_i\}<\infty$. 和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i^pE\|X_i\|^p)/a_i^{2p}<\infty$

则 $S_n/a_n\xrightarrow{P}0\Leftrightarrow S_n/a_n\to 0$ a.s..

**证明** 假设 $S_n/a_n\xrightarrow{P}0$，往证 $S_n/a_n\to 0$ a.s.. 注意到定理条件(iii)，我们不妨假设 $\|X_i\|\leqslant b_i$ $(i=1,2,\cdots)$. 取 $M>1$，由引理 1 有

$$Ma_{n_k}\leqslant a_{n_{k+1}}\leqslant M^3a_{n_k+1},k=1,2,\cdots, \tag{3}$$

此处$\{n_k\}$为一自然数列的子序列. 对$n_k<m\leqslant n_{k+1}$,我们有

$$\frac{\|S_m\|}{a_m}\leqslant\frac{\|S_{n_k}\|}{a_{n_k}}+\max_{n_k<i\leqslant n_{k+1}}\frac{\|S_i-S_{n_k}\|}{a_{n_k+1}}. \tag{4}$$

因为$S_n/a_n\xrightarrow{P}0$,故对每个$\varepsilon>0$,存在$k_0$,使当$k\geqslant k_0$时

$$\max_{n_k<i\leqslant n_{k+1}}P\{\|S_i-S_{n_{k+1}}\|>a_{n_{k+1}}\frac{\varepsilon}{2M^3}\}\leqslant 1/2. \tag{5}$$

由(5)式及 Ottaviani 不等式([8]PP. 110—111)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=k_0}^{\infty}P\{\max_{n_k<i\leqslant n}\frac{\|S_i-S_{n_k}\|}{a_{n_k+1}}>\varepsilon\}\\ &\leqslant\sum_{k=k_0}^{\infty}P\{\max_{n_k<i\leqslant n_{k+1}}\|S_i-S_{n_k}\|>a_{n_{k+1}}\varepsilon/M^3\}\\ &\leqslant\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{P\{\|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}\|>a_{n_{k+1}}\varepsilon/2M^3\}}{\min\limits_{n_k<i\leqslant n_{k+1}}P\{\|S_{n_{k+1}}-S_n\|\leqslant a_{n_{k+1}}\varepsilon/2M^3\}}\\ &\leqslant 2\sum_{k=k_0}^{\infty}P\{\|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}\|>a_{n_{k+1}}\varepsilon/2M^3\},\end{aligned} \tag{6}$$

若能证明$S_{n_k}/a_{n_k}\to0$a. s. ,则就证明了$S_n/a_n\to0$ a. s. . 羁率瞪啊由$\{X_n\}$的相对独立性及$(S_{n_{k+1}}-S_{n_k})/a_{n_{k+1}}\to0$ a. s. . 可知

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}P\{\|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}\|>a_{n_{k+1}}\varepsilon/2M^3\}<\infty. \tag{7}$$

进而应用(4)、(6)、(7)式及 Borel—Canteill 引理便知$S_n/a_n\to0$ a. s. .

下面往证$S_{n_k}/a_{n_k}\to0$ a. s. 成立. 令$\mathscr{F}_0$为平凡$\sigma$—代数,$\mathscr{F}_i=\sigma(X_1,\cdots,X_i)$,$Y_{n,i}=E(\|S_n\|\,|\mathscr{F}_i)-E(\|S_n\|\,|\mathscr{F}_{i-1})$,$1\leqslant i\leqslant n$,易见$\{Y_{n,i},\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$为一鞅差序列,并且

$$\sum_{i=1}^{n}Y_{n,i}=\|S_n\|-E\|S_n\|. \tag{8}$$

于是由(1)、(2)($p=q$的情形)及(8)式,有

$$E\left(\frac{|\,\|S_n\|-E\|S_n\|\,|}{a_n}\right)^p=E\left(\frac{|\sum_{i=1}^{n}Y_{n,i}|}{a_n}\right)^p\leqslant\frac{C}{a_n^p}\sum_{i=1}^{n}E|Y_{n,i}|^p\leqslant\frac{C}{a_n^p}\sum_{i=1}^{n}E\|X_i\|^p.$$

利用定理所设条件(ii)有

$$E\left(\frac{|\,\|S_n\|-E\|S_n\|\,|}{a_n}\right)^p\to0.$$

再注意到$S_n/a_n\xrightarrow{P}0$,便知$E\|S_n\|/a_n\to0$,因此为证$S_n/a_n\to0$ a. s. ,只须证明

$$\frac{\|S_{n_k}\|-E\|S_{n_k}\|}{a_{n_k}}\to0\quad\text{a. s. .} \tag{9}$$

由(8)式不难看出

$$(\|S_n\|-E\|S_n\|)^2=\sum_{i=1}^{n}Y_{n,i}^2+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}Y_{n,i}Y_{n,j} \tag{10}$$

令$U_n=\sum_{i=1}^{n}Y_{n,j}^2$,$V_n=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}Y_{n,i}Y_{n,j}$. 故为证(9)式,只须再证

$$\frac{U_{n_k}}{a_{n_k}^2} \to 0 \quad \text{a.s.} \tag{11}$$

及

$$\frac{V_{n_k}}{a_{n_k}^2} \to 0 \quad \text{a.s.}. \tag{12}$$

首先证明(11)式成立. 利用[7]中引理 6.1.1 可得

$$\frac{U_n}{a_n^2} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} |Y_{n,i}|^p}{a_n^p}\right)^{2/p}. \tag{13}$$

由(1)式及$\{X_n\}$的相互独立性及定理条件(ii)立得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^p}\sum_{i=1}^{n} E(|Y_{n,i}|^p|\mathscr{F}_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^p}\sum_{i=1}^{n} E((\|X_i\| + E\|X_i\|)^p|\mathscr{F}_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^p}\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p = 0. \tag{14}$$

令 $W_{n,i} = |Y_{n,i}|^p - E(|Y_{n,i}|^p|\mathscr{F}_{i-1})$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则$\{W_{n,i},\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$为一鞅差序列([1]P. 30). 应用(1)式及$\|X_i\|\leqslant b_i$,有

$$E|W_{n,i}|^2 \leqslant CE|Y_{n,i}|^{2p} \leqslant CE\|X_i\|^{2p} \leqslant Cb_i^pE\|X_i\|^p. \tag{15}$$

由引理 3($p=q=2$ 的情形)及(15)式容易推出,对每个 $\varepsilon>0$,均有

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|\sum_{i=1}^{n_k} W_{n_k,i}| > a_{n_k}^p\varepsilon\} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=1}^{n_k} E|W_{n_k,i}|^2$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=1}^{n_k} b_i^pE\|X_i\|^p \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(b_i^pE\|X_i\|^p)/a_i^{2p} < \infty. \tag{16}$$

上述不等式还应用了(3)式及定理条件(iii),显而易见

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}^p}\sum_{i=1}^{n_k} W_{n_k,i} = 0 \quad \text{a.s.}. \tag{17}$$

综合(13)、(14)及(17)式即知(11)式成立.

其次证明(12)式成立. 与$\{Y_{n,i},1\leqslant i\leqslant n\}$相同 $\{\sum_{j=1}^{i-1} Y_{n,i}Y_{n,j},\mathscr{F}_i, 2\leqslant i\leqslant n\}$ 仍为一鞅差序列([1]P. 30),应用引理 3($p=q$ 的情形)、定理条件($j$)及(3)式,采用与(16)式类似的证法,即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|V_{n_k}| > a_{n_k}^2\varepsilon\} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}|E\sum_{i=2}^{n_k}\sum_{j=1}^{i-1} Y_{n_k,i}Y_{n_k,j}|^p \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=2}^{n_k} E|Y_{n_k,i}\sum_{j=1}^{i-1} Y_{n_k,j}|^p$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=2}^{n} E((\|X_i\| + E\|X_i\|)^p(|\sum_{j=1}^{i-1} Y_{n_k,j}|^p))$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=2}^{n_k}(E\|X_i\|^p)(\sum_{j=1}^{i-1} E|Y_{n_k,j}|^p)$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=2}^{n}(E\|X_i\|^p)(\sum_{j=1}^{i-1} E(\|X_j\| + E\|X_j\|)^p)$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_k}^{2p}}\sum_{i=2}^{n_k}(E\|X_i\|^p)\sum_{j=1}^{i-1} E(\|X_j\|^p$$

$$\leqslant C\sum_{i=2}^{\infty}(E\|X_i\|^p/a_i^{2p})\sum_{j=1}^{i-1}E(\|X_j\|^p<\infty. \tag{18}$$

此处 $\varepsilon$ 为任意给定的正常数. 于是由 Borel—Canteill 引理立得(12)式成立. 至此定理证毕

**定理 2** 设 $\{X_n\}$ 为相互独立的 $B$ 值随机变量序列, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $1<p\leqslant 2$, $q\geqslant 1$, 如果

(i) $\sum_{i=2}^{\infty}(E\|X_i\|^{pq}/i^{2(1+q(p-1))})\sum_{j=1}^{i-1}(E\|X_j\|^{pq}<\infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(E\|X_i\|^{pq}/n^{1+q(p-1)}\to 0$;

(iii) 存在正实数序列 $\{a_n\}$, 使得 $\sum_{i=1}^{\infty}P\{\|X_i\|>a_i\}<\infty$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^{pq}E\|X_i\|^{pq})/i^{2(1+q(p-1))}$ $<\infty$, 则 $S_n/n\xrightarrow{P}0\Leftrightarrow S_n/n\to 0$ a.s..

**证明** 假设 $S_n/n\xrightarrow{P}0$, 往证 $S_n/n\to 0$ a.s.. $Y_{n,i}$, $U_n$, $V_n$ 记号的意义同定理 1. 不失一般性, 我们假设 $\|X_i\|\leqslant a_i(i=1,2,\cdots)$. 采用与定理 1 类似的证法不难看出: 若能证明 $S_{2^n}/2^n\to 0$ a.s., 即可证得 $S_n/n\to 0$ a.s.. 应用引理 3 及 Hölder 不等式可有

$$E\frac{|\|S_n\|-E\|S_n\||}{n})^{pq}=E\left(\frac{|\sum_{i=1}^{n}Y_{n,i}|}{n}\right)^{pq}\leqslant\frac{C}{n^{pq}}E(\sum_{i=1}^{n}|Y_{n,i}|^p)^q$$

$$\leqslant\frac{C}{n^{1+q(p-1)}}(\sum_{i=1}^{n}E|Y_{n,i}|^{pq}\leqslant\frac{C}{n^{1+q(p-1)}}(\sum_{i=1}^{n}E\|X_i\|^{pq}$$

于是由定理条件(ii)及 $S_n/n\xrightarrow{P}0$ 可知, 为证 $S_{2^n}/2^n\to 0$ a.s., 只须证明

$$\frac{\|S_{2^n}\|-E\|S_{2^n}\|}{2^n}\to 0\quad\text{a.s.}. \tag{19}$$

再仿定理 1(10)—(12)式的证明, 为验证(19)式成立, 只须再证

$$\frac{U_{2^n}}{2^{2n}}\to 0\quad\text{a.s.} \tag{20}$$

及

$$\frac{V_{2^n}}{2^{2n}}\to 0\quad\text{a.s.}. \tag{21}$$

首先证明(20)式成立. 应用[7]中引理 6.1.1 及 Hölder 不等式有

$$\frac{U_n}{n^2}\leqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|Y_{n,i}|^p}{n^p}\right)^{2/p}\leqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|Y_{n,i}|^{pq}}{n^{1+q(p-1)}}\right)^{2/pq} \tag{22}$$

与(14)式类似, 我们还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+q(p-1)}}\sum_{i=1}^{n}E(|Y_{n,i}|^{pq}|\mathscr{F}_{i-1})=0. \tag{23}$$

令 $W_{n,i}=|Y_{n,i}|^{pq}-E(|Y_{n,i}|^{pq}|\mathscr{F}_{i-1})$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则由 $\|X_i\|\leqslant a_i$, 引理 3 及定理条件(ii)立得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|\sum_{i=1}^{2^n}W_{2^n,i}|>2^{n(1+q(p-1))}\varepsilon\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(1+q(p-1))}}\sum_{i=1}^{2^n}E|W_{2^n,i}|^2$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(1+q(p-1))}}\sum_{i=1}^{2^n}E|Y_{2^n,i}|^{2pq}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(1+q(p-1))}}\sum_{i=1}^{2^n}a_i^{pq}E\|X_i\|^{pq}$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}(a_i^{pq}E\|X_i\|^{pq})/i^{2(1+q(p-1))}<\infty. \tag{24}$$

对每个 $\varepsilon>0$ 均成立. 联立(22)－(24)式即知(20)式成立.

其次证明(21)式成立. 利用引理 3 及 Hölder 不等式,仿(18)式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|V_{2^n}|>2^{2n}\varepsilon\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2npq}}E\Big|\sum_{i=2}^{2^n}\sum_{j=1}^{i-1}Y_{2^n,i}Y_{2^n,j}\Big|^{pq}$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2npq}}E\Big(\Big(\sum_{i=2}^{2^n}\Big|\sum_{j=1}^{i-1}Y_{2^n,i}Y_{2^n,j}\Big|^{p}\Big)^{q}\Big)$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n(q-1)}}{2^{2npq}}E\Big(\sum_{i=2}^{2^n}\Big|\sum_{j=1}^{i-1}Y_{2^n,i}Y_{2^n,j}\Big|^{pq}\Big)$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n(q-1)}}{2^{2npq}}\sum_{i=2}^{2^n}(E\|X_i\|^{pq})\Big(E\Big|\sum_{j=1}^{i-1}Y_{2^n,j}\Big|^{pq}\Big)$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n(q-1)}}{2^{2npq}}\sum_{i=2}^{2^n}(E\|X_i\|^{pq})\Big((i-1)^{q-1}\sum_{j=1}^{i-1}E|Y_{2^n,j}|^{pq}\Big)$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(1+q(p-1))}}\sum_{i=2}^{2^n}(E\|X_i\|^{pq})\sum_{j=1}^{i-1}E\|X_j\|^{pq}$$

$$\leqslant C\sum_{i=2}^{\infty}(E\|X_i\|^{pq}/i^{2(1+q(p-1))}\sum_{j=1}^{i-1}E\|X_j\|^{pq}<\infty.$$

进而(21)式成立. 至此定理证毕.

上述诸定理是实值 Teicher 大数定律在可分 Banach 空间的推广. 易见在定理 1 中,若取 $a_n=b_n=n$,则 $\sum_{i=1}^{\infty}E\|X_i\|^{p}/i^{p}<\infty$ 意味着(i)－(iii)均成立($p=2$ 时,即为经典的 Kolmogorov 条件),进而定理结论成立. 而 $\sum_{i=1}^{\infty}E\|X_i\|^{p}/i^{p}<\infty$ 恰为 Kuelbs 和 Zinn([2]、[3])文中定理的条件,故定理 1 包含并改进了 Kuelbs 和 Zinn 的结果. 类似地在定理 2 中取 $a_n=n^{(1+q(p-1))/pq}$,则 $\sum_{i=1}^{\infty}E\|X_i\|^{pq}/i^{1+q(p-1)}<\infty$ (记为条件(＊))也意味着(i)－(iii)均成立,进而定理结论成立. 而当 $p=2$ 时,上述条件(＊)化为 $\sum_{i=1}^{\infty}E\|X_i\|^{2q}/i^{1+q}<\infty$ ,此即 de Acosta([3])文中定理的条件,于是定理 2 包含并改进了 de Acosta 的结果.

关于 Teicher 型强收敛与空间的几何结构之间的关系,我们有下述的

**定理 3** 设 $B$ 是一 Banach 空间,$1<p\leqslant2,q\geqslant1$,则下列叙述等价:

(i) $B$ 为一 $P$ 型空间*.

(ii) 对 $B$ 中的每一个相互独立均值为零的随机变量序列 $\{X_n\}$，如果满足定理 1 的条件，则 $\sum_{i=1}^{n} X_i/a_n \to 0$ a.s..

(iii) 对 $B$ 中每一个相互独立均值为零的随机变量序列 $\{X_n\}$，如果满足定理 2 的条件，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0 \quad \text{a.s.}.$$

**证明** (i)⇒(ii)：注意到 $EX_n=0$ 及 $B$ 为 $P$ 型空间，利用文献[10]中定理 2.1 可得

$$\frac{E\|\sum_{i=1}^{n} X_i\|^p}{a_n^p} \leqslant C\frac{\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p}{a_n^p}.$$

再应用所设条件有 $\sum_{i=1}^{n} X_i/a_n \xrightarrow{P} 0$，进而由定理 1 即知 $\sum_{i=1}^{n} X_i/a_n \to 0$ a.s..

(i)⇒(iii)：与(i)⇒(ii)类似，应用文献[11]中命题 2.1 及 Hölder 不等式，可有

$$\frac{E\|\sum_{i=1}^{n} X_i\|^{pq}}{n^{pq}} \leqslant C\frac{E(\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|^p)^q}{n^{pq}} \leqslant C\frac{\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^{pq}}{n^{1+q(p-1)}}.$$

故由所设条件即得 $\sum_{i=1}^{n} X_i/n \xrightarrow{P} 0$. 进而由定理 2 知 $\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$ a.s.

(ii)⇒(i)：取 $a_n=b_n=n$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} E\|X_n\|^p/n^p < \infty$ 意味着定理 1 中(i)—(iii)均成立，故由(ii)，$\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$ a.s.，进一步，由文献[10]中定理 2.1 即知 $B$ 为一 $P$ 型空间.

(iii)⇒(i)：与(ii)⇒(i)类似，当 $a_n=n^{(1+q(p-1))/pq}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} E\|X_n\|^{pq}/n^{1+q(p-1)} < \infty$ 意味着定理 2 中(i)—(iii)成立，故由(iii)，$\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$ a.s.，进而 $B$ 为一 $P$ 型空间([11]命题 2.1).

易见一维欧式空间(即实直线)为 2 型空间，进而为 $P$ 型空间([9]P. 344)，$1\leqslant p\leqslant 2$，故将定理 1、定理 2 应用于实随机变量且附加均值为零的条件后，$S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$ 及 $S_n/n \xrightarrow{P} 0$ 是自然成立的( 见定理 3(i)⇒(ii)(i)和⇒(iii)的证明). 不难看出针对实随机变量，定理 1 在 $a_n=n$，$p=2$ 时，即为本文开始所述 Teicher 定理.

## 参 考 文 献


[1] Stout, W. E. , *Almost Sure Convergence*, Academic Press, 1974.

[2] Kuelbs, J. and Zinn, J. , *Some stability results for vector valued random variables*, Ann. Probability, 7


---

* 称可分 Banach 空间为 $p$ 型的($1\leqslant p\leqslant 2$)，如果存在常数 $C>0$，使对任意的自然数 $n$ 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$，均有

$$(E\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\|^p)^{1/p} \leqslant C(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p)^{1/p},$$

此处 $\{\varepsilon_n\}$ 为一 Bernoulli 序列.

关于 $P$ 型空间还有一些等价定义，参见文献[9].

(1979), 75—84.

[3] de acosta, A., *Inequalities of B—valued random vectors with applications to the strong law of large numbers*, Ann. Probability, 9(1981), 157—161.

[4] Szynal, D. and Kuczmaszewska, A., *Note on Chung—Teicher type conditions for the strong law of large numbers in a Hilbert space*, *Probability Theory on Vector Space* Ⅲ, Lecture Notes in Mathematics, V 1080, Springer—Verlag, 1984, 299—305.

[5] Wittmann, R., *A general law of iterated logarithm*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 68(1985), 521—543.

[6] Yurinskii, V, V., *Exponential bounds for large deviations*, Theor. Probability Appl, 19(1974), 154—155.

[7] Taylor, R. L., *Stochastic convergence of weighted sums of random elements in linear spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 672(1978), Springer—Verlag, Berlin.

[8] Araujo, A. and Gine, E., *The central limit theorem for real and Banach valued random variables*, New York, John Wiley Sons, 1980.

[9] Kuelbs, J., *Probability on Banach spaces*, Marcel Dekker Inc, New York and Basel, 1978.

[10] Hoffmann—Jφrgensen, J. and Pisier, G., *The law of large numbers and central limit theorem in Banach spaces*, Ann. Probability, 4(1976), 587—599.

[11] *Woyczynski, W. A.*, *On Marcinkiewicz—Zugmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence*, Prob. and Math. Statist., 1(1980), 117—132.

# General Version of Teicher's Strong Law of Large Numbers in Banach Spaces

*Yang Xiaoyun*

(Dept. of Math., Jilin Univ., Changchun)

## Abstract

It is shown that the general version of Teicher's strong law of large numbers for random variables, taking values in separable Banach spaces is true under the assumption that the weak law of large numbers holds.