第13卷第3期
1993年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 3
Aug. 1993

局部凸空间中弱收敛网的几个性质*

孙佑民　　安世全
(西北师范大学数学系,兰州 730070)

设 X 是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间,$\{s_n|n\in D\}$是 X 中的网,其中 D 是一定向集.

定理 1　设$\{x_n|n\in D\}$有 $W-\lim\limits_n s_n=s_0$, $s_0\in X$,则对于 s_0 的任一邻域 σ,存在$\{s_n|n\in D\}$的某有限的凸组合 $\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j s_{n_j}$ 属于 σ,其中 $\alpha_j\geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j=1$.

定理 2**　设$\{s_n|n\in 0\}$是 X 中的 Cauchy 网,且 $W-\lim\limits_n s_n=s_0$,则 $S-\lim\limits_n s_n=s_0$.

定义　局部凸线性拓扑空间中的任何一个平衡且吸收的凸闭集称为桶(Barred),若 X 中的每一个桶均为 0 的一个邻域,则称 X 为桶空间.

在桶空间有下面的重要事实:

引理　一个局部凸线性拓扑空间是自反的,当且仅当它是一个桶空间,且 X 的每个平衡凸闭集在 X 的弱拓扑下均是紧集.

定理 3　设 X 是局部凸的桶空间,$\{s_n|n\in D\}$是 X 中的弱收敛网,则对于$\forall\ \varepsilon>0$ 及 X 中的平衡有界凸闭集 B,必$\exists\ \delta>0$,使得当 $f\in X_B'$,只要$\sup\limits_{x\in B}|f(x)|<\delta$ 时,就有$|f(s_n)|<\varepsilon$ 对 $n\in D$ 一致地成立.

定理 4　设 X 是桶空间,则 X 中的网$\{s_n|n\in D\}$弱收敛于 s_0 的充要条件是:

(i)　对于$\forall\ \varepsilon>0$ 及平衡有界凸闭集 $B\subset X$,$\exists\ \delta>0$,若$\sup\limits_{x\in B}|f(x)|<\delta$ 时,有$|f(s_n)|<\varepsilon$ 对于$\forall\ n\in D$ 成立;

(ii)　对 X_B' 中的任一强稠子集 D' 内的每一个 f,网$\{f(s_n)|n\in D\}$收敛于 $f(s_0)$.

定理 5　设 X 是局部凸的桶空间,且 X 是序列完备的,则在 X 中强解析与弱解析等价.

参 考 文 献

[1]　吉田耕作,泛函分析,人民教育出版社(1983).

[2]　Helmut. H. Schaefer. Topological vector Spaces. Sptinger—Verlag New york Heidebocry Berlin(1970).

[3]　Gottfried köthe. Topological Vector Spaces. New york(1983).

* 1991年9月2日收到.1993年3月10日收到修改稿.

** 1987年冀绍文先生曾证明:设$\{x_n\}$是 X 中的 Cauchy 列,若 $W-\lim x_n=x_0$,则 $S-\lim\limits_n x_n=x_0$.