第13卷第4期
1993年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 4
Nov. 1993

关于几乎可解群*

陈 重 穆
(西南师范大学，重庆 630715)

摘 要

本文推广了关于局部有限群的 Asar 定理及 P. Hall—Kulatilaka, Kargapolov 定理.

关于局部有限群有下述著名定理，

定理 1 局部有限群 G,若有一 Syolw p—子群为有限，则 G 的所有 Sylow p—子群有限且彼此共轭([1,定理 14.3.4]).

定理 2 (Asar) G 为局部有限群.若 G 之每可数子群仅含可数多个 Sylow p—子群，则 G 之所有 Sylow p—子群共轭([1,定理 14.3.5]).

定理 3 (P. Hall—Kulatilaka, Kargapolov) 每无限局部有限群含有无限 Abel 子群([1,定理 14.3.7]).

本文主要目的是给出上述定理的某些推广.

定义 4 若群 G 有有限正规列

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_{s-1} \geqslant G_s = 1$$

使 G_{i-1}/G_i, $i=1,\cdots,s$ 为 Abel 群或有限群，则称 G 为几乎可解群.特别，有限群为几乎可解群；局部有限群为周期局部几乎可解群.

显然，几乎可解的子群与同态象也是几乎可解群.

引理 5 设 P 为几乎可解 p—群 G 的真子群.若 P 有限生成，则 $P<N_G(P)$.

证明 几乎可解 p—群为可解 p—群，由[1,习题,12.1.1],G 为局部幂零.P 为有限生成，取 $x\in G\backslash P$,则 $H=\langle P,x\rangle$ 也是有限生成且真含 P.因此，H 为幂零，故

$$P = N_H(P) \leqslant N_G(P).$$

引理 6 (Schur—Zassenhaus 引理) 设 N 为周期群 G 的 Abel 正规子群，G/N 为有限，阶为 m.如果 N 的任何元的阶均与 m 互素，则存在 G 的 m 阶子群 H,使 $G=HN$, $H\cap N=1$,且如此的子群 H 彼此共轭.

证明 与 Schur—Zassenhaus 引理原证相似，只须注意原证中，只用到 G/N 的有限性及对 N 之每元 b,言程 $x^m=b$ 在 N 内有解(参见[1,定理 9.1.2]情形(i)).

定理 7 G 为周期几乎可解群.如果 G 有一 Sylow p—子群 P 为有限，则 G 的所有 Sylow p—子群均有限，且彼此共轭.

* 1991年6月20日收到.

证明 由 G 几乎可解，G 有有限正规列

$$G=G_0\geqslant G_1\geqslant\cdots\geqslant G_{s-1}\geqslant G_s=1,$$

G_{i-1}/G_i 为 Abel 或有限. 对 s 用归纳. $s=1$ 时，G 为 Abel 或有限，定理显然成立. 当 $s>1$，研讨 $\overline{G}=G/G_{s-1}$. 先证，$\overline{P}=PG_{s-1}/G_{s-1}$ 为 $\overline{G}$ 的 Sylow p—子群. 若不然，则 $\overline{P}$ 真含在 $\overline{G}$ 的 Sylow p—子群 $\overline{H}=H/G_{s-1}$ 内. $\overline{H}$ 为几乎可解 p—群，由引理 5，有元 x 在 $\overline{P}$ 外，使 $\overline{P}^x=\overline{P}$. 由 G 为周期，可选 x 为 p—元. 于是 $\langle P,x\rangle G_{s-1}/G_{s-1}$ 为有限 p—群. 当 G_{s-1} 为 Abel，设其 p—补为 N，又 G_{s-1} 的 Sylow p—子群为特征，含在 G 的任何 Sylow p—子群内，因而有限. 因此，$\langle P,x\rangle G_{s-1}/N=\langle P,x\rangle N/N$ 为有限 p—群，阶大于 $|P|$. 由引理 6，P 真含在 $\langle P,x\rangle G_{s-1}$ 的一 Sylow p—子群内. 矛盾.

当 G_{s-1} 为有限，则 $\langle P,x\rangle G_{s-1}$ 也有限，同样得出矛盾.

设 P_1 为 G 的任一 Sylow p—子群. 于是 $\overline{P}_1=P_1G_{s-1}/G_{s-1}$ 为 $\overline{G}$ 的 p—子群. 由归纳，$\overline{P}_1$ 共轭地含于 $\overline{P}$ 内. 因此 $\overline{P}_1$ 有限. 再由

$$P_1G_{s-1}/G_{s-1}\simeq P_1/(P_1\cap G_{s-1}),$$

$P_1\cap G_{s-1}$ 为 G_{s-1} 的 p—子群，共轭地含于 $P\cap G_{s-1}$ 内，因此也有限，故 P_1 有限. 从而又得 $\overline{P}_1$ 为 $\overline{G}$ 的 Sylow p—子群，$\overline{P}$ 共轭地含于 $\overline{P}$ 内. 不妨设 $\overline{P}=\overline{P}_1$，即得 $PG_{s-1}=P_1G_{s-1}$. 当 G_{s-1} 有限，由有限群的 Sylow 定理，得 P 与 P_1 共轭；当 G_{s-1} 为周期 Abel 群，由引理 6，得 P 与 P_1 共轭.

定理 8　周期局部几乎可解群 G，若有一 Sylow p—子群 P 为有限，则 G 的所有 Sylow p—子群均有限，且彼此共轭.

证明 取任一有限 p—子群 P_1. 于是 $\langle P,P_1\rangle$ 为周期几乎可解群，P 为其 Sylow p—子群. 由定理 7，P_1 共轭含于 P 内.

G 若有无限 p—子群 P_2，则由引理 5，P_2 有任意大阶的有限 p—子群. 这不可能. 故 G 的 Sylow p—子群均有限，且彼此共轭.

定理 9　设群 G 的每 Sylow p—子群为局部有限，又 G 的每有限生成子群满足"Sylow 有限 p—性质"，即任有限 p—子群共轭于任一 Sylow p—子群的某子群. 如果 G 的每可数子群仅有可数多个 Sylow p—子群，则 G 之所有 Sylow p—子群共轭.

证明 可逐字逐句引用[1，定理 14.3.5]的证明. 在(ii)中当已证得 $\langle P,P^y\rangle$ 不为 p 群时，于是有非 p—元 $c=a_1b_1^ya_2b_2^y\cdots a_nb_n^y$，$a_i,b_j\in P$. 取 $X_0=\langle T,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\rangle$ 便得有限 p—群 X_0 有 $T<X_0\leqslant P$，使 $\langle X_0,X_0^y\rangle$ 不为 p—群.

定理 10 (Asar 定理的推广)　设周期群 G 的每有限生成子群为几乎可解且有一个有限的 Sylow p—子群. 如果 G 的每可数子群仅有可数多个 Sylow p—子群，则 G 之所有 Sylow p—子群共轭.

证明 设 P 为 G 的一 Sylow p—子群，P_1 为 P 的有限生成子群. 显然 P_1 为 P_1 的 Sylow p—子群. 由假设 P_1 为有限，故 P 为局部有限. 设 H 为 G 的任一有限生成子群. 由假设及定理 7，H 的 Sylow p—子群彼此共轭. 因此，由定理 9，便得本定理.

定理 11　每无限几乎可解群含有无限 Abel 子群.

证明 设 G 为无限几乎可解群，它有正规列

$$G=G_0\geqslant G_1\geqslant\cdots\geqslant G_s=1,$$

G_{i-1}/G_i 为 Abel 或有限. 对 s 用归纳证本定理. $s=1$，由 G 无限，G 本身为 Abel，定理成立. 如果 G_1 无限，则可用归纳于 G_1，得 G_1 有无限 Abel 子群，从而 G 也有无限 Abel 子群. 现设 G_1 有限，

则 G/G_1 为无限 Abel 群. 研讨 $H_1=C_G(G_1)$. 因 $G/C_G(G_1)$ 同构于 $\mathrm{Aut}G_1$ 的一子群. $\mathrm{Aut}G_1$ 有限,故 H_1 为无限群.

$$H_1/(H_1\cap G_1)\simeq H_1G_1/G_1\leqslant G/G_1.$$

令 $A_1=H_1\cap G_1$,A_1 为有限 Abel 群. 若 $A_1=1$,则由上式,H_1 为 Abel,定理成立. 故可设 $A_1\neq 1$,$A_1\leqslant Z(H_1)$. H_1 无限,在 $H_1\backslash A_1$ 内有元 x_1. 若 x_1 阶无限,则 $\langle x_1\rangle$ 为无限 Abel 子群,故可设 $|x_1|$ 有限. 令 $A_2=\langle A_1,x_1\rangle$. 显然 A_2 为 H_1 的有限 Abel 正规子群(因为 H_1/A_1 为 Abel). 研讨 $H_2=C_{H_1}(A_2)$. H_1/H_2 同构于 $\mathrm{Aut}A_2$ 之一子群,为有限,故 H_2 为无限群. 在 $H_2\backslash A_2$ 内有元 x_2. 令 $A_3=\langle A_2,x_2\rangle$. A_3 为 H_2 的有限 Abel 正规子群. 继续下去,得 Abel 子群列

$$A_1<A_2<A_3<\cdots.$$

其并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为 G 之无限 Abel 子群. 定理证讫.

注 本证是一个直接而初等的证明. 当 G_1 有限,则 G 为 FC 群. 利用 FC 群的结构定理[1 定理,14.5.10]及定理 3,可得本定理之另证.

定理 12 (H—K 定理的推广) 无限局部几乎可解群 G,有无限 Abel 子群.

证明 若 G 的每有限生成子群为有限,则 G 为局部有限,归于定理 3. 若 G 有一有限生成子群为无限,则它必为无限几乎可解群. 由定理 11,它含有无限 Abel 子群,从而 G 亦然.

参 考 文 献

[1] D. S. J. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer—Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982, 413—418.

On Almost Solvable Groups

Chen Zhongmu
(Dept. of Math., Southwest-China Teachers University, Chongqing)

Abstract

Group G is called almost solvable, if G has a finite normal series such that each factor group of the series is abelian or finite. We show that

(1) If locally almost solvable period group G has a finite Sylow p-subgroup, then all Sylow p-subgroups of G are finite and conjuate.

(2) Every infinite locally almost solvable group has an infinite abelian subgroup.

(3) Suppose that the Sylow p-subgroups of G are locally finite and every finitely generated subgroup of G possesses the "Sylow finite p- property". That is, each finite p-subgroup is isomorphic to some subgroup of each Sylow p-subgroup. If each countable subgroup of G has only countably many Sylow p-subgroups, then all the Sylow p-subgroups of G are conjugate.