第13卷第4期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 4
1993年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1993

插值多项式对解析部分的收敛估计*

钟乐凡 $\boxed{\text{沈燮昌}}$

(北京大学数学系,100871)

§1 引 言

设 D 是单位圆$\{z||z|<1\}$,T 为单位圆周$\{z||z|=1\}$. 对于 $f\in C(T)$,我们记 $L_n(f,z)$为在 $n+1$ 次单位根$\{e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}\}_{k=0}^{n}$上对 $f(z)$的 n 次插值多项式. 自然的 $L_n(f,z)$在 D 内解析,因此,当 f 不能解析延拓到 D 内时,就不可能保证 $L_n(f,z)$一致收敛于 f. 甚至,存在着 $f\in C(T)$,且 f 是某个 D 内解析函数的边值,但 $L_n(f,z)$在 T 上发散.

由于 $f(e^{it})$是以 2π 为周期的函数,设 $f(e^{it})=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{ikt}$. 令 $p_+f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$, 为 $f(z)$的"解析部分",Meray,Walsh[1] 证明了 $L_n(f,z)$在 D 内闭一致收敛于 $p_+f(z)$. 最近 Cavaretta,Dikshit Sharma[2] 还对于 $L_n(f,z)$的导数及 $f(z)$的 Hermitte—Fejer 插值的内闭一致收敛性进行了讨论:

应当看到,在解析函数理论中内闭一致收敛是一种很弱的收敛性. 于是我们很自然地把 $p_+f(z)$,$L_n(f,z)$放到某些典型的解析函数空间中研究收敛性. 首先想到的是在 Hardy 空间 H^p $(p>0)$的意义下,是否能保证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_+f(z)-L_n(f,z)\|_{H^p}=0$, $\forall f\in C(T)$? 回答是否定的. 因为若取 $f_0(z)=z^{-1}$,则 $p_+f_0(z)=0$,但 $L_n(f_0,z)=z^n$,而 $\|z^n\|_{H^p}=\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|z^n|^p|d_z|\}^{\frac{1}{p}}=1$.

如果我们是在加权的 Bergman 空间

$$H_q^p=\{g:g\text{ 在 }D\text{ 内解析},\ \|g\|_{p,q}=\{\frac{1}{(q-1)\pi}\iint\limits_D|g(z)|^p(1-|z|^2)^{q-2}d\sigma_z\}^{\frac{1}{p}}<+\infty\},$$

$(0<p<+\infty,\ 1<q<+\infty)$上讨论 $L_n(f,z)$的收敛性 $d\sigma(z)$为面积元,却能得到肯定的结论. 下面是这篇文章的主要结果:

定理 设 $1<p<+\infty$,$1<q<+\infty$,$f\in C(T)$,则

$$\|p_+f(z)-L_n(f,z)\|_{p,q}\leqslant C\{\tau(f,\frac{1}{n})+\|f\|_\infty/n^{\frac{q-1}{p}}\},\tag{1}$$

这里,C 是只与 p,q 有关的正常数,而

$$\tau(f,\frac{1}{n})_p=\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(f,\theta,\frac{1}{n})^pd\theta\}^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\omega(f,\theta,\frac{1}{n})=\sup\limits_{t,t+h\in(\theta-\frac{1}{n},\theta+\frac{1}{n})}|f(e^{i(t+h)})-f(e^{it})|$.

* 1991年7月16日收到.

注记 1 (1)式就能保证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_+f(z)-L_n(f,z)\|_{p,q}=0$ 对任意的 $0<p<+\infty$, $1<q<+\infty$ 成立. 因为 $\tau(f,\frac{1}{n})_p\to 0$ 在 $p>1$ 时;对于 $p\leqslant 1$,由于 $\|\cdot\|_{p,q}$ 关于 p 单调上升,也有收敛性. 事实上定理只要求 $f(z)$ 在圆周上 Riemann 可积便成立.

注记 2 从(1)式马上可以推出以往的 $L_n(f,z)$ 内闭一致收敛于 $f(z)$ 的结论.

注记 3 (1)式右边的估计式在某些情况对于某些 $f(z)$ 是可以达到的,例如在 $(q-1)/p\leqslant 1$ 时取 $f(z)=z^{-1}$,则(1)式除去常数倍意义下是精确的. 一般来说,右边第二项中 $n^{\frac{1-q}{p}}$ 这个因子是不能改进的.

为了简单起见,我们以下一直设 $1<p,q<+\infty$,并以 C_j $(j=1,2,\cdots)$ 表示只与 p,q 有关的常数.

§2 一些准备

众所周知,若 $F\in L^p(T)$,则 $p_+F\in H^p$ 并且

$$\|p_+F\|_{H^p}\leqslant C_1\|F\|_{L^p}. \tag{2}$$

我们还知道 $H^p\subset H^p_q$,并且对 $g\in H^p$,由[3]:

$$\|g\|_{p,q}\leqslant C_2\|g\|_{H^p}, \tag{3}$$

因此我们可以立即断定 $p_+f\in H^p_q$.

引理 1 存在着 $[\frac{n}{2}]$ 次三角多项式 $T_n(e^{i\theta})=\sum\limits_{k=-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]}b_ke^{ik\theta}$,使得

$$\|f-T_n\|_{L^p}\leqslant C_3\tau(f,\frac{1}{n})_p. \tag{4}$$

同时

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|f(e^{2k\pi i/(n+1)})-T_n(e^{2k\pi i/(n+1)})|^p\leqslant C_4[\tau(f,\frac{1}{n})_p]. \tag{5}$$

此结论可参见[4]或[5],在[4]中,T_n 取成 f 与 Jackson 核的卷积,即

$$T_n(e^{i\theta})=\frac{1}{d_{[\frac{n}{2}]}}\int_0^{2\pi}f(e^{i(\theta+t)})\left[\frac{\sin\frac{[\frac{n}{2}]t}{2}}{[\frac{n}{2}]\sin\frac{t}{2}}\right]^4dt,$$

其中 $d_{[\frac{n}{2}]}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\frac{[\frac{n}{2}]t}{2}}{[\frac{n}{2}]\sin\frac{t}{2}}\right]^4dt.$

§3 定理证明

对于三角多项式

$$T_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} b_k e^{ik\theta}, \tag{6}$$

我们自然地令

$$T_n(z) = \sum_{k=-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} b_k z^k \quad 0 < |z| \leqslant 1. \tag{7}$$

很容易验证

$$L_n(T_n, z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} b_k z^k + z^{n+1} \sum_{k=-[\frac{n}{2}]}^{-1} b_k z^k = p_+ T_n(z) + z^{n+1}[T_n(z) - p_+ T_n(z)].$$

这样

$$p_+ T_n(z) = L_n(T_n, z) - z^{n+1}[T_n(z) - p_+ T_n(z)], \tag{8}$$

因此

$$\begin{aligned} \| p_+ f(z) - L_n(f,z) \|_{p,q} &\leqslant \| p_+ f - p_+ T_n \|_{p,q} + \| p_+ T_n(z) - L_n(f,z) \|_{p,q} \\ &\leqslant \| p_+(f - T_n) \|_{p,q} + \| L_n(T_n,z) - L_n(f,z) \|_{p,q} + \| z^{n+1}[T_n(z) - p_+ T_n(z)] \|_{p,q} \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{9}$$

由(2),(3)及(4)

$$\begin{aligned} I_1 = \| p_+(f - T_n) \|_{p,q} &\leqslant C_5 \| p_+(f - T_n) \|_{H^p} \\ &\leqslant C_6 \| f - T_n \|_{L^p} \leqslant C_7 \tau(f, \frac{1}{n})_p. \end{aligned} \tag{10}$$

由(3) $I_2 = \| L_n(T_n,z) - L_n(f,z) \|_{p,q} \leqslant \| L_n(T_n - f, z) \|_{H^p}$, 由于 $L_n(T_n - f, z)$是次数不超过 n 的代数多项式,根据著名的 Marcinkiewicz—Zygmund 不等式,[6,30 页]及(4)得到

$$\begin{aligned} I_2 = \| L_n(T_n - f, z) \|_{H^p} &\leqslant C_7 \{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} | L_n(T_n - f, e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}) |^p \}^{\frac{1}{p}} \\ &= C_7 \{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} | (T_n - f)(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}) |^p \}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_8 \tau(f, \frac{1}{n})_p. \end{aligned} \tag{11}$$

由(7)可知

$$z^{n+1-[\frac{n}{2}]}[T_n(z) - p_+ T_n(z)] = g(z) \tag{12}$$

在$|z| \leqslant 1$ 上解析,因此

$$\begin{aligned} I_3 = \| z^{n+1}[T_n(z) - p_+ T_n(z) \|_{p,q} &= \| z^{[\frac{n}{2}]} g(z) \|_{p,q} \\ &= \{ \frac{1}{(q-1)\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} | g(re^{i\theta}) |^p r^{[\frac{n}{2}]p} (1 - r^2)^{q-2} r d\theta dr \}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \{ \frac{2}{(q-1)\pi} \int_0^1 r^{[\frac{n}{2}]p} (1 - r^2)^{q-2} r dr \}^{\frac{1}{p}} \cdot \| g \|_{H^p}. \end{aligned}$$

由 g 的表达式(12)以及(2)可知 $\| g \|_{H^p} \leqslant C_8 \| T_n \|_p \leqslant C_8 \| f \|_\infty$ 而

$$\int_0^1 r^{[\frac{n}{2}]p}(1-r^2)^{q-2}rdr = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{[\frac{n}{2}]p}{2}}(1-t)^{q-2}dr = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{[\frac{n}{2}]p}{2}+1)\Gamma(q-1)}{\Gamma(\frac{[\frac{n}{2}]p}{2}+q)}.$$

由 Sterling 公式我们不难得出：$\dfrac{\Gamma(\frac{[\frac{n}{2}]p}{2}+1)\Gamma(q-1)}{\Gamma(\frac{[\frac{n}{2}]p}{2}+q)} \leqslant C_9 n^{-(q-1)}$ 这样 $I_3 \leqslant C_{10} n^{-\frac{(q-1)}{p}} \| f \|_\infty$ 和(9),(10),(11)一起，便完成了定理的证明.

后记： *在该文投稿后不久，合作者之一沈燮昌教授就与世长辞了．谨以此文深表对他的怀念.*

参 考 文 献

[1] J. L. Walsh., *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, AMS Colloq. Pub. Vol. XX, Providence R. I. 1969.

[2] A. S. Cavaretta Jr., H. P. Dikshit and A. Sharma, *Convergence of Certain Polynomial Interpolants to a Function Defined on the Unit Circle*, Acta Math. Hung. 53(1989), 143—147.

[3] P. L. Duien., *Extension of a theorem of carleson*, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 143—146.

[4] C.K. Chui, X. C. Shen and L. Zhong., *Estimation of Complex Quasi—Interpolatory Approximation*, In: Topics in polynomials of one and several variables and their applications, Th. M. Rassias eds., World Scientific Press, Hong Kong, 1993, 125—142.

[5] V. A. Popov and A. S. Andreev., *Sleckens type theorem for one—side trigonometric and spline approximation*, C. R. Acad, Bulg. Sci., 31(1978), 151—154.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol Ⅱ, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

Interpolatory Approximation to Analytic Part of Continuous Functions

Zhong Lefan　　*Shen Xiechang*

(Dept. of Math., Peking University)

Abstract

In this paper, it is show that the interpolants of continuous functions converge to the analytic part in the sense of Bergman norm. An estimation of the rate of convergence is given.