第13卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 4
1993年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1993

三参数线性规划最优基的稳定性分析*

简金宝
(广西大学数学与信息科学系，南宁 530004)

摘要

在这篇文章里我们研究一种含三个参数的线性规划最优基的稳定性. 得出了最优基的稳定性及二维稳定性的一些较好的结果和最优基稳定的充要条件，并给出了原始、对偶问题的最优解和最优值的级数表达式. 避免了计算逆矩阵的巨大工作. 文中结果推广了诸如 Robert M. FREUND[1] 等许多前人的结论.

§1 引言

对于如下标准型线性规划

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} \min & C\cdot x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x\geqslant 0 \end{cases}$$

当(P)的约束矩阵 $A=F+\theta G$ 时，文献[1]对其灵敏度和最优基稳定性得出了优秀的成果. 对于矩阵 A 和向量 b,c 都是参数 θ 的多项式函数时，我们在[3]中作了相应的探讨，并得出相应的结果. 对于只有向量 c 和(或)b 含参数的问题(P)，其灵敏度分析已有了如[2,4,5,6]的许多研究和优异成果. [3]虽然比较完整地讨论了单参数线性规划的灵敏度，但在实际工程计算和优化设计中往往会遇到含多个参数的线性规划，为此本文引进和研究了矩阵 A，向量 c 和 b 分别含参数 θ,λ,t 的线性规划的灵敏度，得出了较为满意的结果.

§2 强非退化最优基的稳定性

本文讨论如下含三个参数 λ,θ,t 的线性规划

$$P(\lambda,\theta,t)\qquad \begin{cases} \min & Z(\lambda,\theta,t)=c(\lambda)\cdot x \\ \text{s.t.} & A(\theta)x=b(t) \\ & x\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $c(\lambda)=g(\lambda)c,b(t)=h(t)b,A(\theta)=F+\sum\limits_{i=1}^{r}\theta^iG^{(i)}$. b,c 分别为 m 维列向量和 n 维行向量，

* 1991年5月6日收到.

$g(\lambda), h(t)$为λ和t的多项式，$F, G^{(i)} \in R^{m\times n}$, $i=1,\cdots,r$.

考虑$P(\lambda,\theta,t)$的对偶问题

$$D(\lambda,\theta,t)\quad \begin{cases}\max\ W\cdot b(t)\\ \text{s.t. } W\cdot A(\theta)\leqslant c(\lambda).\end{cases}$$

对于固定参数(λ,θ,t)，当$P(\lambda,\theta,t)$有最优解时，记其最优值为$Z(\lambda,\theta,t)$，基最优解为$x(\theta,t)=(x_I(\theta,t)^T, x_J(\theta,t)^T)^T$，$I$为最优基，$J=\{1,\cdots,n\}\backslash I$. 记$A_i(\theta)$为$A(\theta)$的第$i$列，$i=1,\cdots,n$. $\forall I\subset\{1,2,\cdots,n\}$，$A_I(\theta)=(A_i(\theta), i\in I)$，$y_I=(y_i, i\in I)$.

对于$P(\lambda,\theta,t)$的任一基I，$x_I(\theta,t)=A_I(\theta)^{-1}b(t)$，$x_J(\theta,t)=0$. $W_I(\lambda,\theta)=c_I(\lambda)A_I(\theta)^{-1}$，则$W_I(Y,\theta)b(t)=c(\lambda)\cdot x(\theta,t)$，由对偶理论知若再有$x_I(\theta,t)\geqslant 0$，$c(\lambda)-W_I(\lambda,\theta)A(\theta)\geqslant 0$，则$I$为$P(\lambda,\theta,t)$的最优基，$x(\theta,t)$，$W_I(\lambda,\theta)$分别为$P(\lambda,\theta,t)$，$D(\lambda,\theta,t)$的最优解. 为讨论方便，引入以下定义.

定义1 设I为$P(\lambda,\theta,t)$的基，若满足

$$x_I(\theta,t)=A_I(\theta)^{-1}b(t)>0,\quad c_J(\lambda)-W_I(\lambda,\theta)A_J(\theta)>0, \tag{2.1}$$

则称I为强非退化最优基.

令$\bar{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$，$R$上区间是指$(a,b)$，$[a,b)$，$(b,a]$或$[a,b]$，$a,b\in\bar{R}$. 三维空间$R^3$中区域是指$I_1\times I_2\times I_3$，$I_1,I_2,I_3$为$R$上的区间. R^3中点$q(\lambda,\theta,t)$的邻域

$$q_\varepsilon=\{(x,y,z)\,|\,|x-\lambda|<\varepsilon, |y-\theta|<\varepsilon, |z-t|<\varepsilon\}.$$

定义2 设I为$P(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的最优基，若存在$\bar q=(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的邻域$\bar q_\varepsilon$使得$\forall\ (\lambda,\theta,t)\in\bar q_\varepsilon$，$I$为$P(\lambda,\theta,t)$的最优基，称基$I$关于点$\bar q$是稳定的.

R^3中平面区域$\{(\bar\lambda,\theta,t)\,|\,|\theta-\bar\theta|<\varepsilon, |t-\bar t|<\varepsilon\}$，$\{(\lambda,\bar\theta,t)\,|\,|\lambda-\bar\lambda|<\varepsilon, |t-\bar t|<\varepsilon\}$，或$\{(\lambda,\theta,\bar t)\,|\,|\lambda-\bar\lambda|<\varepsilon, |\theta-\bar\theta|<\varepsilon\}$称为点$(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的一个二维邻域.

定义3 若$P(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的最优基$I$在$(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的一个二维邻域内稳定，则称$I$关于点$(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$是二维稳定的.

定理1 设$x(\theta,t)$为$P(\lambda,\theta,t)$相应基I的非退化基最优解，则I为强非退化的最优基当且仅当$P(\lambda,\theta,t)$的最优解唯一.

定理2 设I为$P(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$的强非退化最优基，

$$\bar x=A_I(\bar\theta)^{-1}b(\bar t), \bar x_J=0, \bar x=(\bar x_I^T,\bar x_J^T)^T, \overline{W}=c_I(\bar\lambda)A_I(\bar\theta)^{-1}.$$

则最优基I关于点$\bar q=(\bar\lambda,\bar\theta,\bar t)$是稳定的，且在$\bar q$的一邻域内有

i) $A_I(\theta)^{-1}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^j[-B^{-1}E_I(\theta)]^jB^{-1}$，其中

$$B=A_I(\bar\theta),\quad E_I(\theta)=\sum_{i=1}^{r}\frac{\theta^i-\bar\theta^i}{\theta-\bar\theta}G_I^{(i)},\quad G_I^{(i)}=(G^{(i)}\text{ 的第 } j \text{ 列}, j\in I).$$

ii) $x_I(\theta,t)=\dfrac{h(t)}{h(\bar t)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^j[-B^{-1}E_I(\theta)]^j\bar x,\quad x_J(\theta,t)=0.$

iii) $Z(\lambda,\theta,t)=g(x)\dfrac{h(t)}{h(\bar t)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^jc_I[-B^{-1}E_I(\theta)]^j\bar x.$

iv) $W(\lambda,\theta)=\dfrac{g(\lambda)}{g(\bar\lambda)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^j\overline{W}_I[-E_I(\theta)B^{-1}]^j$为$D(\lambda,\theta,t)$的最优解.

证明 由于 $\det A_I(\bar\theta)\neq 0$，$A_I(\theta)$关于 θ 连续，故存在 $\bar q_\varepsilon$ 邻域，使得 $A_I(\theta)$在 $\bar q_\varepsilon$ 内可逆. 又 I 为强非退化最优基，故 $A_I(\bar\theta)^{-1}b(\bar t)>0$，$c_J(\bar\lambda)-c_I(\bar\lambda)A_I(\bar\theta)^{-1}A_J(\bar\theta)>0$，由连续性知，存在 $\bar q$ 的邻域，使得在该邻域内有

$$x_I(\theta,t)=A_I(\theta)^{-1}b(t)>0,\quad c_J(\lambda)-c_I(\lambda)A_I(\theta)^{-1}A_J(\theta)>0.$$

由此知在 $\bar q$ 的一邻域内，I 为 $P(\lambda,\theta,t)$的强非退化最优基，即 I 关于点 $\bar q$ 是稳定的.

由 $A_I(\theta)A_I(\theta)^{-1}=[(\theta-\bar\theta)E_I(\theta)+B]A_I(\theta)^{-1}=E$ 有

$$A_I(\theta)^{-1}=B^{-1}-(\theta-\bar\theta)B^{-1}E_I(\theta)A_I(\theta)^{-1}. \tag{2.2}$$

由(2.2)递推式有

$$A_I(\theta)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^j[-B^{-1}E_I(\theta)]^jB^{-1}. \tag{2.3}$$

对任一矩阵 $M=(m_{ij})$，记 $\|M\|=\max|m_{ij}|$. 故$(-B^{-1}E_I(\theta))^k$的任一元素 a_{ij}^k 满足：$|a_{ij}^k|\leqslant(m\|B^{-1}\|\cdot\|E_I(\theta)\|)^k$. 而 $\|E_I(\theta)\|$ 在 $\bar\theta$ 的邻域内是有界的，故当 θ 充分接近 $\bar\theta$ 时，(2.3)的级数是收敛的.

由强非退化性知 $h(\bar t)\neq 0$，$g(\bar\lambda)\neq 0$，从而

$$x_I(\theta,t)=A_I(\theta)^{-1}b(t)=\frac{h(t)}{h(\bar t)}\sum_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^j[-B^{-1}E_I(\theta)]^j\bar x_I, \tag{2.4}$$

$$Z(\lambda,\theta,t)=c_I(\lambda)\cdot x_I(\theta,t)=g(\lambda)\frac{h(t)}{h(\bar t)}\sum_{j=0}^{\infty}(\theta-\bar\theta)^jc_IEBE_I(\theta)]^j\bar x_I, \tag{2.5}$$

$$W(\lambda,\theta)=c_I(\lambda)A_I(\theta)^{-1}=\frac{g(\lambda)}{g(\bar\lambda)}\sum_{j=0}^{\infty}\overline{W}(\theta-\bar\theta)^j[-E_I(\theta)B^{-1}]^j. \tag{2.6}$$

由对偶理论易见 $w(\lambda,\theta)$为 $D(\lambda,\theta,t)$的最优解. #

定理 2 虽然讨论了强非退化最优基的稳定性，但许多大规模线性规划通常不能满足强非退化条件，为此我们进一步讨论一般最优基的稳定性.

§3 一般最优基的稳定性

定义 集合 $\mathscr{K}=\{(\lambda,\theta,t)\in R^3\,|\,P(\lambda,\theta,t)$有最优解$\}$，对 $I\subset\{1,\cdots,n\}$，$|I|=m$，定义 $R_I=\{(\lambda,\theta,t)\,|\,I$ 为 $p(\lambda,\theta,t)$之最优基$\}$，∂R_I 为 R_I 之边界.

引理 1 R^3 中任一集合可表为 R^3 中有限个区域的并当且仅当其边界为 R^3 中有限个与坐标轴垂直的平面区域的并.

引理 2 $\partial R_I=s_1(I)\cup\cdots\cup s_j(I)$，其中 $j=j(I)$，$s_i(I)$为 R^3 中与坐标轴垂直的平面区域.

证明 由定义易见

$$R_I=\{(\lambda,\theta,t)\,|\det A_I(\theta)\neq 0,A_I(\theta)^{-1}h(t)b\geqslant 0,g(\lambda)(c-c_IA_I(\theta))\geqslant 0\}.$$

令

$$B_1(I)=\{\theta\,|\det A_I(\theta)\neq 0,A_I(\theta)^{-1}b\geqslant 0,c-c_IA_I(\theta)^{-1}A(\theta)\geqslant 0\},$$
$$B_2(I)=\{\theta\,|\det A_I(\theta)\neq 0,A_I(\theta)^{-1}b\geqslant 0,c-c_IA_I(\theta)^{-1}A(\theta)\leqslant 0\},$$
$$B_3(I)=\{\theta\,|\det A_I(\theta)\neq 0,A_I(\theta)^{-1}b\leqslant 0,c-c_IA_I(\theta)^{-1}A(\theta)\geqslant 0\},$$
$$B_4(I)=\{\theta\,|\det A_I(\theta)\neq 0,A_I(\theta)^{-1}b\leqslant 0,c-c_IA_I(\theta)^{-1}A(\theta)\leqslant 0\},$$

$$B_0(I)=\{\lambda|g(\lambda)\geqslant 0\},\ \bar{B}_0=\{\lambda|g(\lambda)\leqslant 0\},\ F_0=\{t|h(t)\geqslant 0\},\ \bar{F}_0=\{t|h(t)\leqslant 0\}.$$

易见

$$R_I = B_1(I)\times B_0\times F_0\cup B_2(I)\times B_0\times\bar{F}_0\cup B_3(I)\times\bar{B}_0\times F_0\cup B_4(I)\times\bar{B}_0\times\bar{F}_0 \quad (3.1)$$

因为 $A_I(\theta)^{-1}=\dfrac{\mathrm{adj}A_I(\theta)}{\det A_I(\theta)}$, $\det A_I(\theta)$, $\mathrm{adj}A_I(\theta)$, $A_I(\theta)$, $A(\theta)$ 都是 θ 的多项式，而多项式零点只能是有限个. 故 $B_i(I)$ $(i=1,\cdots,4)$, B_0, $\bar{B}_0$, F_0, $\bar{F}_0$ 都可表为有限个区间的并，从而 R_I 可表为有限个区域的并，由引理 1 知引理 2 成立.

记 $H=\bigcup\limits_I\partial R_I$，有如下定理

定理 3 设 I 为 $p(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})$ 的最优基，则除了 R^3 中有限个与坐标轴垂直的平面区域上的点 $(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})$ 外，最优基 I 关于 $(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})$ 是稳定的，且定理 2 的 i)—iv) 表达式成立.

证明 对 $\forall\ \bar{q}=(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})\in\mathscr{K}\backslash H$，设 I 为 $P(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})$ 的最优基，$\bar{q}\in R_I$，而 $\bar{q}\bar{\in} H=\bigcup\limits_I\partial R_I$，故 $\bar{q}$ 为 R_I 之内点，存在 $\bar{q}$ 的邻域 $\bar{q}_\varepsilon\subset R_I$，即 $\forall\ q\in\bar{q}_\varepsilon$，$I$ 为 $P(q)$ 的最优基，从而 I 为稳定的最优基. 再由引理 2 及 H 的定义知定理前部分得证，后部分由定理 2 的证明过程可知成立.

定理 4 设 $\partial R_I=s_1(I)\cup\cdots\cup s_j(I)$, $j=j(I)$, $s_i(I)$ 为 R^3 中与坐标轴垂直的平面区域，则对任意 $\bar{q}\in(\mathrm{ri}s_1(I)\cup\cdots\cup\mathrm{ri}s_j(I))\cap R_I$，$I$ 关于点 $\bar{q}$ 是二维稳定的. 其中 $\mathrm{ri}s$ 表示 s 之相对内点.

证明 由 $\bar{q}\in R_I$，有 I 为 $P(\bar{q})$ 的最优基. 设 $\bar{q}\in\mathrm{ri}s_i(I)\cap R_I$，则由 (3.1) 式 R_I 的构造易知：$\mathrm{ri}s_i(I)\subset R_I$. 不妨设 $s_i(I)=\{(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{t})\,|\,\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2, t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$，由 $\bar{q}\in\mathrm{ri}s_i(I)$，知 $\theta_1<\bar{\theta}<\theta_2$, $t_1<\bar{t}<t_2$，故存在 ε 使得：

$$\{(\bar{\lambda},\theta,t)\,|\,\bar{\theta}-\varepsilon<\theta<\bar{\theta}+\varepsilon,\ \bar{t}-\varepsilon<t<\bar{t}+\varepsilon\}\subset\mathrm{ri}s_i(I)\subset R_I.$$

由定义知 I 关于点 $\bar{q}$ 是二维稳定的.

推论 在定理 4 假设下，对任意 $(\bar{\lambda},\bar{\theta},t)[\bar{t}-\varepsilon<t<\bar{t}+\varepsilon]$ 和 $(\bar{\lambda},\theta,\bar{t})[\bar{\theta}-\varepsilon<\theta<\bar{\theta}+\varepsilon]$，$I$ 为 $P(\bar{\lambda},\bar{\theta},t)$ 和 $P(\bar{\lambda},\theta,\bar{t})$ 的最优基. 且在定理 2 中令 $\lambda=\bar{\lambda},\theta=\bar{\theta}$ 和 $\lambda=\bar{\lambda},t=\bar{t}$ 有表达式 i)—iv) 成立. 此时称 I 关于点 $\bar{q}$ 是一维稳定的.

显然稳定必是二维稳定，二维稳定必是一维稳定.

§4 最优基稳定的充要条件

本节我们将进一步讨论最优基稳定的充要条件.

称矩阵 $M\succeq 0$，如 M 的任意行 $M_i\succeq 0$. "$\succeq$"为字典序. 向量 $Y=(y_i)$，如 $\forall\ y_i=0$ 有 $M_i\succeq 0$，则称 $M\succeq 0\bmod Y$.

引理 3 设 $D(\theta)$ 为 $m\times m$ 阶关于 θ 的含参矩阵，M 为 $l\times m$ 矩阵，v 为 m 维向量，则对任意给定的 θ, $D(\theta)v, D^2(\theta)v,\cdots$ 可由 $D(\theta)v, D^2(\theta)v,\cdots,D^m(\theta)v$ 线性表出，从而 $MD(\theta)v, MD^2(\theta)v,\cdots$ 可由 $MD(\theta)v, MD^2(\theta)v,\cdots,MD^m(\theta)v$ 线性表出.

证明 对给定 θ，设 L 为 $D(\theta)$ 的列向量构成的子空间，则 $D(\theta)v, D^2(\theta)v,\cdots\in L$. 若存在 $j\leqslant m$，使得 $D^{j+1}(\theta)v$ 可由 $D(\theta)v, D^2(\theta)v,\cdots,D^j(\theta)v$ 线性表出，往证 $\forall\ i$, $D^i(\theta)v$ 可由 $D^1(\theta)v,\cdots,D^j(\theta)v$ 线性表出. 假设对于 $k\geqslant j+1$ 成立. 即 $D^k(\theta)v=\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_iD^i(\theta)v$，故 $D^{k+1}(\theta)v=\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_iD^{i+1}(\theta)v$，而 $D^{j+1}(\theta)v$ 可由 $D(\theta)v,\cdots,D^j(\theta)v$ 线性表出，从而 $D^{k+1}(\theta)v$ 可由 $D(\theta)v,\cdots,D^j$

$(\theta)v$ 线性表出. 因此 $D(\theta)v, D^2(\theta)v, \cdots$ 可由 $D(\theta)v, \cdots, D^j(\theta)v$ 从而 $D(\theta)v, \cdots, D^m(\theta)v$ 线性表出. $MD(\theta)v, MD^2(\theta)v, \cdots$ 可由 $MD(\theta)v, \cdots, MD^m(\theta)v$ 线性表出.

引理 4 设 $Y(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty}(\theta-\bar{\theta})^i MD^i(\theta)v$, $M, D(\theta), v$ 如引理 3 所设, $Y(\bar{\theta}) = Mv \geqslant 0$. 定义

$$Q^k(\theta) = (MD(\theta)v, MD^2(\theta)v, \cdots, MD^k(\theta)v),$$

$$P^k(\theta) = (M(-D(\theta))v, M(-D(\theta))^2 v, \cdots, M(-D(\theta))^k v) \quad k=1,2,3,\cdots$$

则有

i) $Y(\theta) \geqslant 0$ 在 $\bar{\theta}$ 的右邻域 $\bar{\theta}_\varepsilon^+ = \{\theta \mid 0 \leqslant \theta - \bar{\theta} < \varepsilon\}$ 内成立当且仅当 $Q^m(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta})$ 在 $\bar{\theta}_\varepsilon^+$ 内成立.

ii) $Y(\theta) \geqslant 0$ 在 $\bar{\theta}$ 的左邻域 $\bar{\theta}_\varepsilon^- = \{\theta \mid 0 \leqslant \bar{\theta} - \theta < \varepsilon\}$ 内成立当且仅当 $P^m(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta})$ 在 $\bar{\theta}_\varepsilon^-$ 内成立.

iii) $Y(\theta) \geqslant 0$ 在 $\bar{\theta}$ 的一邻域内成立当且仅当在 $\bar{\theta}$ 内

$$Q^m(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta}) \text{ 及 } P^m(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta}).$$

证明 i) 当 $Y(\bar{\theta})_i > 0$ 时, 易知在 $\bar{\theta}$ 的邻域内有 $Y(\theta)_i > 0$, 故在 $\bar{\theta}_\varepsilon^+$ 内 $Y(\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow Q^\infty(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta})$ 在 $\bar{\theta}_\varepsilon^+$ 内成立. 由引理 3 知 $Q^\infty(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta}) \Leftrightarrow Q^m(\theta) \succeq 0 \bmod Y(\bar{\theta})$, 即 i) 得证.

在 $\bar{\theta}_\varepsilon^-$ 内有 $Y(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty}(\bar{\theta}-\theta)^i M(-D(\theta))^i v$. 同理于 i) 可证 ii), 由 i) 和 ii) 可得 iii). #

设 I 为 $P(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \iota)$ 的最优基, 若存在 $\varepsilon > \theta$ 使得 $\forall\ (\lambda, \theta, \iota): \bar{\lambda}-\varepsilon < \lambda < \bar{\lambda}+\varepsilon, \bar{\theta} \leqslant \theta < \bar{\theta}+\varepsilon, \bar{\iota}-\varepsilon < \iota < \bar{\iota}+\varepsilon$, I 为 $P(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \iota)$ 的最优基, 则称 I 关于点 $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \iota)$ 是 $\bar{\theta}$-右稳定的. 若 I 为 $P(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \iota)$ $(\bar{\lambda}-\varepsilon < \lambda < \bar{\lambda}+\varepsilon, \bar{\theta}-\varepsilon < \theta \leqslant \bar{\theta}, \bar{\iota}-\varepsilon < \iota < \bar{\iota}+\varepsilon)$ 的最优基, 则称 I 关于 $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \iota)$ 是 $\bar{\theta}$—左稳定的.

设 $\bar{q} = (\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\iota})$, I 为 $P(\bar{q})$ 的最优基, $\bar{x}_I = A_I(\bar{\theta})^{-1}b(\bar{\iota})$, $\bar{w} = c_I(\bar{\lambda})A_I(\bar{\theta})^{-1}$, 令

$$X^m(\theta) = ((-B^{-1}E_I(\theta))\bar{x}_I, (-B^{-1}E_I(\theta))^2\bar{x}_I, \cdots, (-B^{-1}E_I(\theta))^M\bar{x}_I),$$

$$C^m(\theta) = ((B^{-1}E_I(\theta))\bar{x}_I, (B^{-1}E_I(\theta))^2\bar{x}_I, \cdots, (B^{-1}E_I(\theta))^M\bar{x}_I),$$

$$Y^m(\theta) = (-A(\theta)^T(-(B^{-1})^T E_I(\theta)^T)^j \bar{w}^T, j=1,\cdots,m),$$

$$D^m(\theta) = (-A(\theta)^T((B^{-1})^T E_I(\theta)^T)^j \bar{w}^T, j=1,\cdots,m).$$

定理 4 设 $I, \bar{x}_I, \bar{w}, X^m(\theta), Y^m(\theta), C^m(\theta)$ 及 $D^m(\theta)$ 如上所云, 且 $g(\bar{\lambda}) \neq 0, h(\bar{\iota}) \neq 0$, 则有

i) I 为 $\bar{\theta}$—右稳定 $\Leftrightarrow$ 在 $\bar{\theta}_\varepsilon^+$ 内 $X^m(\theta) \succeq 0 \bmod \bar{x}_I$ 及 $Y^m(\theta) \succeq 0 \bmod (g(\bar{\lambda})c - \bar{w}A(\bar{\theta}))$. 定理 2 的 i)—iv) 成立.

ii) I 为 $\bar{\theta}$—左稳定 $\Leftrightarrow$ 在 $\bar{\theta}_\varepsilon^-$ 内 $C^m(\theta) \succeq 0 \bmod \bar{x}_I$ 及 $D^m(\theta) \succeq 0 \bmod (g(\bar{\lambda})c - \bar{w}A(\bar{\theta}))$. 定理 2 的 i)—iv) 成立.

iii) I 为稳定最优基 $\Leftrightarrow$ 在 $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\iota})$ 的邻域内 $X^m(\theta) \succeq 0 \bmod \bar{x}_I$, $Y^m(\theta) \succeq 0 \bmod (g(\bar{\lambda})c - \bar{w}A(\bar{\theta}))$ 及 $C^m(\theta) \succeq 0 \bmod \bar{x}_I$, $D^m(\theta) \succeq 0 \bmod (g(\bar{\lambda}c) - \bar{w}A(\bar{\theta}))$. 定理 2 中的 i)—iv) 成立.

证明 在 $\bar{\theta}$ 的邻域内总有: $x_I(\theta, \iota) = \frac{h(\iota)}{h(\bar{\iota})}\sum_{i=0}^{\infty}(\theta-\bar{\theta})^i(-B^{-1}E_I(\theta))^i\bar{x}_I$, $c - w(\theta, \lambda)A(\theta) = \frac{g(\lambda)}{g(\bar{\lambda})}[g(\bar{\lambda})c + \sum_{i=0}^{\infty} - (\theta-\bar{\theta})^i\bar{w}(-E_I(\theta)B^{-1})^i A(\theta)]$. 因 $h(\bar{\iota}) \neq 0, g(\bar{\lambda}) \neq 0$, 故当 $\iota \to \bar{\iota}, \lambda \to \bar{\lambda}$ 时 $\frac{h(\iota)}{h(\bar{\iota})} > 0, \frac{g(\lambda)}{g(\bar{\lambda})} > 0$. 令 $Y(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty}(\theta-\bar{\theta})^i(-B^{-1}E_I(\theta))^i\bar{x}_I$. $L(\theta) = [g(\bar{\lambda})c + \sum_{i=0}^{\infty} - (\theta-\bar{\theta})^i\bar{w}(-$

$E_I(\theta)B^{-1})^i A(\theta)]^T = g(\bar{\lambda})c^T + \sum_{i=0}^{\infty} -(\theta - \bar{\theta})^i A(\theta)^T((-B^{-1})^T E_I(\theta)^T)^i \bar{w}^T$，则 $Y(\bar{\theta}) \geqslant 0, L(\bar{\theta}) \geqslant 0$.

令 $M_1 = E, D_1(\theta) = -B^{-1}E_I(\theta), v_1 = \bar{x}_I; M_2 = -A(\theta)^T, D_2(\theta) = -(B^{-1})^T E_I(\theta)^T v_2 = \bar{w}^T$. 由引理 4 知 I 为 $\bar{\theta}$—右稳定⇔在 $\bar{\theta}_\epsilon^+$ 内 $Y(\theta) \geqslant 0$ 及 $L(\theta) \geqslant 0$⇔在 $\bar{\theta}_\epsilon^+$ 内 $X^m(\theta) \succeq 0 \bmod \bar{x}_I$ 及 $Y^m(\theta) \succeq 0 \bmod (g(\bar{\lambda})C - \bar{w}A(\bar{\theta}))$，即 i)得证. 由引理 4 即可得 ii)和 iii)成立. #

由于篇幅所限，我们在此不给出方法的示例.

参 考 文 献

[1] Robert M FREUND, *Mathematical Programming Study* 24, New York, 1—13 (1985).

[2] Bazaraa M. S., Jarvis J. J., *Linear Programming and Network Flows.*, New York: John Wiley and Sons, 1977.

[3] 简金宝，单参数线性规划的灵敏度分析，广西大学学报，17:1(1992)，39—44.

[4] Dinkelbach W., *Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung*, New York, 1969.

[5] Gal T., Management Science, 1975; 21: 567—575.

[6] Gal T., *Postoptimal Analysis, Parametric Programming and Related Topics*, Mcgraw—Hill, New York: 1979.

Stability Analysis for Optimal Basis of Three Parametric Linear Programming

Jian Jinbao

(Dept. of Math., Guangxi University, Nanning)

Abstract

In this paper, we study the stability of optimal basis for a paramtric programming containing three parameters. Some better results for stability and two-dimensional stability for optimal basis and necessary and sufficient conditions for the stability of optimal basis are given. The progression forms of the primal and dual optimal solutions and optimal value are derived. Some predecessor's results as Robert M. FREuND are generalized by the results.