第13卷第4期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 4
1993年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1993

Rasche方法在偏序集上最优停止问题中的应用*

易东云
(国防科技大学，长沙 410073)

摘要

本文用Rasche方法对偏序集S中的点进行了筛选，筛选算法简单明了. 设$B(E)$记筛选后的点集，我们证明了 1) $V=\sup EX_\tau=\sup\{EX_\tau:\tau\in B(E)\}$； 2) 若最优停点存在，则必几乎处处取值于$B(E)$中.

§1 引言

偏序集上的最优停止问题自八十年代以来得到了较多的探索，但由于偏序集上的停点缺乏一维停时那样良好的性质，给问题的研究造成了许多实质性的困难. 设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为适应可积过程，则一维最优停时为$\tau=\inf\{n:x_n=r_n\}$，但其中Snell包$r_n=\text{esssup}\{E^{\mathscr{F}_n}X_\sigma:\sigma\geqslant n\}$的计算往往难以进行. [1]中给出了Rasche利用动态规划的策略迭代法得出的最优停时的一种简单明了的算法. 本文对该算法在偏序集上的应用进行了研究.

§2 定理

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，S为满足通常条件的偏序集，即 1) S有最小元； 2) S中每一元s的直接后继集$U_{(s)}$有限； 3) S局部有限. $(\mathscr{F}_s,s\in S)$为$\mathscr{F}$的不减子σ－域族. $(x_s,\mathscr{F}_s,s\in S)$为适应可积过程. 从$\Omega\to S$的一个可测映射称为随机点. 随机点$\tau$称为是停点若$(\tau=s)\in\mathscr{F}_s$对所有$s\in S$. $\Sigma=\{\tau:\tau$是停点且$EX_\tau^-<\infty\}$. 最优停止问题是寻求$\tau^*\in\Sigma$使得

$$EX_{\tau^*}=\sup\{EX_\tau:\tau\in\Sigma\}.$$

这样的τ^*称为是最优停点. 从$\Omega\to S$的幂集的一个映射Q称为是S中的随机集.

设

$M(\mathscr{F})=\{C_s,s\in S):C_s\in\mathscr{F}_s,C_\infty=\Omega\}$，

$\Sigma(c)=\{\tau\in\Sigma:(\tau=s)\subset C_s$ 对所有 $s\in S\}$，

$A_s(c)=\{r>s:E^{\mathscr{F}_s}I(C_r)=1\}$，

$B_s(c)=\{r\geqslant s:E^{\mathscr{F}_s}I(C_r)=1\}$，

$B(c)=\{r\geqslant 0:I(C_r)=1\}$.

* 1991年6月4日收到. 国家自然科学基金资助课题.

其中 $I(C_r)$ 为 C_r 的示性函数. 对 S 中任意一随机集 Q,定义

$$D(Q) = \{u \in Q:\ \text{不存在}\ r \in Q\ \text{使得}\ r < u\}$$

为 Q 的初遇. 停点 $\tau \in Q$ 表示 $\tau(\omega) \in Q(\omega)$ 对所有 $\omega \in \Omega$,即 τ 取值于随机集 Q 中.

对 $\forall\ C=(C_s, s\in S)\in M(\mathscr{F})$. 定义

$$C_s^* = C_s \cap \Big(\bigcap_{u\in D(A_s(c))} \{X_s \geq E^{\mathscr{F}_s} X_u\}\Big).$$

则 $C_s^* = C_s \bigcap\limits_{u>s} (\{X_s \geq E^{\mathscr{F}_s} X_u\} \cap (E^{\mathscr{F}_s} I(C_u)=1\} \bigcap\limits_{s<r<u} \{E^{\mathscr{F}_s} I(C_r)<1\}))$, $C_s^* \in \mathscr{F}_s$,从而可递归定义

$C^0 = (\Omega)$,

$C^k = (C^{k-1})^*$,

$E_s = \bigcap\limits_k C_s^k,\ E=(E_s, s\in S)$.

定理 设对每一不减停点列 $(\sigma_n, n\geq 0)$ 有 $EX_{\lim\sigma_n} \geq \lim EX_{\sigma_n}$ 则

1) $V=\sup\{EX_\tau: \tau\in\Sigma\} = \sup\{EX_\tau: \tau\in B(E)\}$

2) 若 τ 为最优停点,则必有 $\tau\in B(E)$ a.s.

证明 1)

a) 设 $C\in M(\mathscr{F})$ 及 $\sigma\in\Sigma(C)$ 定义

$$\hat{\sigma} = \sum_s (\sigma I(\{\sigma=s\}\cap C_s^*) + \hat{\tau}_s I(\{\sigma=s\}\cap \bar{C}_s^*)),$$

其中 $\bar{C}_s^*$ 为 C_s^* 的余集,$\hat{\tau}_s$ 满足在 $\{\sigma=s\}\cap\bar{C}_s^*$ 上有 $X_s < E^{\mathscr{F}_s} X_{\hat{\tau}_s}$,具体构造如下:任意给定 S 的一个列举 $\{s_1, s_2, \cdots\}$,这决定了 S 的一个列举序 $\prec$,则 $(S,\prec)$ 为全序集(参看[3, P209]). 对 $u>s$ 定义

$$H_{su} = (\{X_s < E^{\mathscr{F}_s} X_u\} \cap \{E^{\mathscr{F}_s} I(C_u)=1\} \bigcap_{s<r<u} \{E^{\mathscr{F}_s} I(C_r)<1\}),$$

$$\bigcap_{y>s,\, y\prec u} (\{X_s \geq E^{\mathscr{F}_s} X_y\} \cap \{E^{\mathscr{F}_s} I(C_y)=1\} \bigcap_{s<r<y} \{E^{\mathscr{F}_s} I(C_r)<1\}),$$

$$H_{ss} = \Omega - \bigcup_{u>s} H_{su}.$$

容易验证 $\{H_{su}, u\geq s\}$ 为在 s 点给出的 Ω 的一个 $\mathscr{F}_s$-可测剖分. 定义

$$\hat{\tau}_s = \sum_{u\geq s} u H_{su},\quad \hat{\tau}_s\ \text{是停点}.$$

这种剖分的直观意义在于从 $D(A_s(C))$ 中选出确定的元(即按列举序 $\prec$ 是 $D(A_s(C))$ 中第一元)取为 $\hat{\tau}_s$. 注意到 $\{\sigma=s\}\cap\bar{C}_s^* = \{\sigma=s\}\cap(\bigcup\limits_{u\in D(A_s(c))} \{X_s < E^{\mathscr{F}_s} X_u\}) \subset \bigcup\limits_{u>s} H_{su}$,所以 $\hat{\sigma}$ 的构造是合理且存在的.

$\{\hat{\sigma}=r\} = (\{\sigma=r\}\cap C_r^*) \cup (\bigcup\limits_{s<r} \{\hat{\tau}_s=r\}\cap\bar{C}_s^*) \in \mathscr{F}_r$. 从而 $\hat{\sigma}$ 是停点且

$$EX_\sigma = \sum_s \Big(\int_{(\sigma=s)\cap C_s^*} X_s + \int_{(\sigma=s)\cap\bar{C}_s^*} X_s\Big) \leq \sum_s \Big(\int_{(\sigma=s)\cap C_s^*} X_s + \int_{(\sigma=s)\cap\bar{C}_s^*} X_{\hat{\tau}_s}\Big) = EX_{\hat{\sigma}}.$$

下面递归定义 $\sigma_0=\sigma, \sigma_{k+1}=\hat{\sigma}_k,\ k\geq 0$ 则 $\sigma_k\uparrow, EX_{\sigma_k}\uparrow$. 令 $\sigma^*=\lim\sigma_k$, σ^* 是停点,由假设 $EX_{\sigma^*} \geq \lim EX_{\sigma_k} \geq EX_\sigma$. 我们说 $\sigma^*\in B(C^*)$,从而 $\sigma^*\in\Sigma(C^*)$. 事实上只需说明在 $(\sigma^*=u)$ 上有 $I(C_u^*)=1$. 设 $\omega\in(\sigma^*=u)$,由 $\sigma_k\uparrow\sigma^*$ 知存在 k_0 使得 $\sigma_{k_0+1}(\omega)=u=\sigma_{k_0}(\omega)$,从而 $\omega\in\{\sigma_k=u\}\cap C_u^*\subset C_u^*$.

b) 对 $\forall\ \tau\in\Sigma=\Sigma(C^0)$,递归定义 $\tau_0=\tau, \tau_{k+1}=\tau_k^*,\ k\geq 0$. 令 $\tau'=\lim\tau_k$, τ' 是停点. 由 a) 知 $\tau_k\uparrow, EX_{\tau_k}\uparrow$,由假设 $EX_{\tau'}\geq\lim EX_{\tau_k}\geq EX_\tau$. 下面只需说明 $\tau'\in B(E)$. 设 $\omega\in(\tau'=u)$,则必存在 k_0

使得 $\tau_k(\omega)<u, k<k_0; \tau_k(\omega)=u, k\geqslant k_0$. 由 a) 知 $\tau_k\in B(C^k)$, 对 $\forall\ k\geqslant 0$, 从而 $\omega\in C_u^k$ 对 $k\geqslant k_0$. 而当 $k<k_0$ 时 $\omega\in C_u^{k_0}\subset C_u^k$, 所以 $\omega\in\bigcap_k C_u^k=E_u$, 即在 $(\tau'=u)$ 上有 $I(E_u)=1$. 所以 $\tau'\in B(E)$.

2) 反证法 设 τ 最优但 $P(\tau\notin B(E))>0$, 即存在 s 使得 $P(\{\tau=s\}\cap\overline{E}_s)>0$. 不妨设 $\{\tau=s\}\subset\overline{E}_s$ 且 $P(\tau=s)>0$. 注意到 $\overline{E}_s=\bigcup_k\overline{C}_s^k=\bigcup_k(\bigcup_{u\in D(A_s(C^k))}\{X_s<E^{\mathscr{F}_s}X_u\})$. 设 $(S,\prec)$ 为 a) 中给出的列举, 对 $r>s$ 定义

$$H_{sr}=\begin{cases}\varnothing & r\notin\bigcup_k D(A_s(C^k))\\ \{X_s<E^{\mathscr{F}_s}X_r\}\bigcap_{q\prec r,q\in\bigcup_k D(A_s(C^k))}\{X_s\geqslant E^{\mathscr{F}_s}X_q\}, & r\in\bigcup_k D(A_s(C^k))\end{cases},$$

则

$$H_{sr}=(\bigcup_k\{E^{\mathscr{F}_s}I(C_r^k)=1\}\bigcap_{s<u<r}\{E^{\mathscr{F}_s}I(C_u^k)<1\}\bigcap\{X_s<E^{\mathscr{F}_s}X_r\},$$

$$\bigcap_{q\prec r}(\bigcup_k\{E^{\mathscr{F}_s}I(C_q^k)=1\}\bigcap_{s<p<q}\{E^{\mathscr{F}_s}I(C_p^k)<1\})\bigcap\{(X_s\geqslant E^{\mathscr{F}_s}X_q\}).$$

可见 $H_{sr}\in\mathscr{F}_s$ 且互不相交, $\bigcup_{r>s}H_{sr}=\overline{E}_s$, ($\{H_{sr},r>s\}$ 的直观意义在于从 $\bigcup_k D(A_s(C^k))$ 中确定出第一个使得 $X_s<E^{\mathscr{F}_s}X_r$ 的那个 r)

定义

$$\tilde{\tau}=\begin{cases}r & \text{在}\{\tau=s\}\cap H_{sr}\text{上}\quad\text{对所有}\ r>s\\ \tau & \text{在}\ \Omega-\{\tau=s\}\ \text{上}\end{cases}.$$

当 $u>s$ 时 $(\tilde{\tau}=u)=(\tau=u)\cup((\tau=s)\cap H_{su})\in\mathscr{F}_u$; 当 $u\leqslant s$ 时, $(\tilde{\tau}=u)=(\tau=u)\in\mathscr{F}_u$, 从而 $\tilde{\tau}$ 是停点. 由 $P(\{\tau=s\})>0$,

$$\int_{(\tau=s)}X_\tau=\sum_{r>s}\int_{(\tau=s)\cap H_{sr}}X_s<\sum_{r>s}\int_{(\tau=s)\cap H_{sr}}E^{\mathscr{F}_s}X_r)=\sum_{r>s}\int_{(\tau=s)\cap H_{sr}}X_r=\int_{(\tau=s)}X_{\tilde{\tau}}.$$

从而 $EX_\tau<EX_{\tilde{\tau}}$ 与 τ 最优矛盾. 证毕.

§3 结束语

我们有理由猜测定理中的 1) 应有如下更进一步的结论

$$\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\Sigma\}=\sup\{EX_\tau:\tau\in D(B(E))\}$$

这进一步说明最优停点可在 $B(E)$ 的初遇中取到, 但由于缺乏偏序集上初遇的性质, 尚未得到证明.

致谢: 在撰写本文的过程中, 金治明教授仔细听取了全文的报告, 定理中的 2) 即是在他的提示下得到的, 在此谨以致谢.

参考文献

[1] A. Irlc. Bayreuth, *On the best choice problem with random size*, Z. für. Opers. Research Vol. 24(1980), 177—190.

[2] A. Mandelbaum and R. J. Varderbei, *Optimal stopping and supermartigales over partially ordered sets*. Z. Wahrsch. Verw, Gebiete 57(1981), 253—264.

[3] U. Krengal and L. Sucheston, *Stopping rules and tactics for processed indexed by a directed set*, J. Multivariate Anal 11(1981), 199—229.

[4] R. Bellman(1957), *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.

The Application of Rasche's Method in Optimal Stopping Problem over the portially Ordered Set

Yi Dongyun
(National University of Defense Technology, Changsha)

Abstract

With the Rasche's method, we sift the set $B(E)$ from the partially ordered set and prove that

1) $V = \sup EX_\tau = \sup\{EX_\tau : \tau \in B(E)\}$;

2) if τ is optimal stopping point then $\tau \in B(E)$.