第13卷第4期
1993年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 4
Nov. 1993

关于《亚正定阵理论(Ⅱ)》一文的错误*

刘麦学
(洛阳师专数学系,471022)

设 $A\in R^{n\times n}$,如果 $R(A)\triangleq\frac{A+A'}{2}$ 为正定矩阵,则称 A 为亚正定矩阵. 文[1]、[2]研究了亚正定矩阵,得出了一些新的结果. 这里指出,文[2]中有些疏漏和错误.

取 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,则 A 为亚正定矩阵,B 为正定矩阵,容易验证文[2]中定理2和定理5的结论均不成立. 其原因在于原文定理证明中错误地运用了 Hölder 第二不等式. 要使结论成立,两个定理均需附加条件"亚正定矩阵 A 的特征值都是实数".

文[2]中定理7的结论正确,但证明有误. 当偶数个虚数之积为实数时,其中两个虚数的乘积不一定是实数. 下面对文[2]定理7的证明加以修正. 这要用到如下命题:

命题 设 $Z_{2i-1}=a_{2i-1}+b_i\sqrt{-1}$, $Z_{2i}=a_{2i}-b_i\sqrt{-1}$, $i=1,2,\cdots,s$. 其中 $a_k>0, k=1,2,\cdots,2s$; $b_i>0$, $i=1,2,\cdots,s$. 则当 $\prod_{k=1}^{2s}Z_k$ 为正实数时,有

$$\prod_{k=1}^{2s}Z_k\geqslant\prod_{i=1}^{s}(a_{2i-1}a_{2i}+b_i^2).$$

证明 设 $M=\prod_{k=1}^{2s}Z_k$, 则

$$\begin{aligned}M^2=M\cdot\overline{M}&=\prod_{k=1}^{2s}Z_k\cdot\prod_{k=1}^{2s}\overline{Z}_k=\prod_{k=1}^{2s}Z_k\cdot\overline{Z}_k\\&=\prod_{i=1}^{s}(a_{2i-1}^2+b_i^2)(a_{2i}^2+b_i^2)\\&=\prod_{i=1}^{s}[a_{2i-1}^2a_{2i}^2+(a_{2i-1}^2+a_{2i}^2)b_i^2+b_i^4]\\&\geqslant\prod_{i=1}^{s}[a_{2i-1}^2a_{2i}^2+2a_{2i-1}a_{2i}b_i^2+b_i^4]\\&=\prod_{i=1}^{s}(a_{2i-1}a_{2i}+b_i^2)^2.\end{aligned}$$

因为 $M>0$,所以

$$M\geqslant\prod_{i=1}^{s}(a_{2i-1}a_{2i}+b_i^2).$$

证毕.

* 1991年6月24日收到. 1993年3月11日收到修改稿.

应用上述命题，原文定理 7 的证明可修改如下：

由 A、B 亚正定知，$qA+(1-q)B$ 亚正定，从而 $|qA+(1-q)B|>0$，于是

$$\begin{aligned}|qA+(1-q)B| &= \prod_{i=1}^{r}[q\lambda_i+(1-q)\mu_i]\cdot\prod_{j=1}^{s}[qa_j+(1-q)\mu_{r+2j-1}+qb_j\sqrt{-1}]\\ &\quad\cdot[qa_j+(1-q)\mu_{r+2j}-qb_j\sqrt{-1}]\\ &\geqslant \prod_{i=1}^{r}[q\lambda_i+(1-q)\mu_i]\prod_{j=1}^{s}\{[qa_j+(1-q)\mu_{r+2j-1}][qa_j\\ &\quad+(1-q)\mu_{r+2j}]+q^2b_j^2\}.\end{aligned}$$

而文[2]定理 7 证明中的后边部分无误，故原文定理结论成立.

参 考 文 献

[1] 屠伯埙，亚正定阵理论(Ⅰ)，数学学报，33:4(1990)，462—471.

[2] 屠伯埙，亚正定阵理论(Ⅱ)，数学学报，34:1(1991)，91—102.

[3] 屠伯埙，线性代数方法导引，复旦大学出版社，上海，1986.

Error in "Theory of Meta-Positive Definite Matrix (II)"

Liu Maixue

(Luoyang Teacher College)

Abstract

This short note points out some errors in [2] and corrects the proof of Theorem 7 in it.