第13卷第4期 1993年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 4 Nov. 1993

一种新的线性规划势函数及其应用*

王 宇
(大连理工大学工程力学研究所，116024)

张宏伟
(大连理工大学数学科学研究所，116024)

考虑一般形式的线性规划问题

$$\text{(LP)}\qquad \lambda^* = \min c^T x \quad \text{s.t.}\quad a_i^T x \leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

其中 $c,x,a_i \in R^n$. 用 $\Omega=\{x\,|\,a_i^Tx\leqslant b_i, i=1,\cdots,m\}$ 表示(LP)的可行域，对于 $\lambda > c^Tx$，假设 $P(\lambda)=\Omega\cap\{x\,|\,c^Tx<\lambda\}$ 是非空有界的. 众多学者通过构造势函数得到各种各样的求解(LP)的内点算法，如 Renegar[1], Jarre[2](已推广到非线性凸规划)使用形如

$$\Phi(x,\lambda) = -m\cdot\ln(\lambda - c^Tx) - \sum_{i=1}^{m}\ln(b_i - a_i^Tx) \tag{1}$$

势函数. 但这种用对数函数定义的势函数，在可行域边界上和可行域外没有定义，这样必然导致小步长迭代. 本文给出一种新的势函数，这种势函数定义为极大值函数

$$F(x,\lambda) \triangleq \max\{0, c^Tx-\lambda, a_1^Tx-b_1,\cdots,a_m^Tx-b_m\} \tag{2}$$

的凝聚函数[3]

$$\Phi_p(x,\lambda) = \frac{1}{p}\ln(1+e^{p(c^Tx-\lambda)}+e^{p(a_1^Tx-b_1)}+\cdots+e^{p(a_m^Tx-b_m)}), \tag{3}$$

其中 p 是一个充分大正参数. 注意函数 $F(x,\lambda)$ 和 $\Phi_p(x,\lambda)$ 分别与函数

$$\bar F(x,\lambda) \triangleq \max\{c^Tx-\lambda, a_1^Tx-b_1,\cdots,a_m^Tx-b_m\} \tag{4}$$

和

$$\bar\Phi_p(x,\lambda) = \frac{1}{p}\ln(e^{p(c^Tx-\lambda)}+e^{p(a_1^Tx-b_1)}+\cdots+e^{p(a_m^Tx-b_m)}) \tag{5}$$

有相同的极小值点. 根据最佳逼近理论，使 $\bar F(x,\lambda)$ 达到极小值的点恰是区域 $P(\lambda)$ 的中心点，又由凝聚函数的性质[3]，当 $p\to\infty$ 时，$\Phi_p(x,\lambda)$ 和 $\bar\Phi_p(x,\lambda)$ 分别单调递减地收敛于 $F_p(x,\lambda)$ 和 $\bar F(x,\lambda)$，且有 $|F(x,\lambda)-\Phi_p(x,\lambda)|\leqslant\frac{\ln(m+2)}{p}$ 和 $|\bar F(x,\lambda)-\bar\Phi_p(x,\lambda)|\leqslant\frac{\ln(m+1)}{p}$，因此对固定有限的 p，可由 $\Phi_p(x,\lambda)$ 和 $\bar\Phi_p(x,\lambda)$ 的极小化求区域 $P(\lambda)$ 的近似中心点 $x(\lambda)$，且当 $\lambda\to\lambda^*$ 时，$x(\lambda)$ 将近似于(LP)的最优解，但从下面的命题1可知 $\Phi_p(x,\lambda)$ 的 Hessian 是正定矩阵，而 $\bar\Phi_p(x,\lambda)$ 的 Hessian 有一零特征值. 此外，易见 $\Phi_p(x,\lambda)$ 在整个空间上有定义且是 x 的可微函数，其梯度和 Hessian 分别是

$$\nabla_x\Phi_p(x,\lambda) = A^Tu(x) \tag{6}$$

和

* 1992年11月6日收到.

$$\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda) = pA^T[\mathrm{diag}(u(x)) - u(x)u(x)^T]A, \tag{7}$$

其中 $u(x)=(u_0(x),u_1(x),\cdots,u_m(x))^T$, $A=(c,a_1,\cdots,a_m)^T$, $u_0(x)=\dfrac{e^{p(c^Tx-\lambda)}}{1+e^{p(c^Tx-\lambda)}+\sum\limits_{j=1}^{m}e^{p(a_j^Tx-b_j)}}$,

$u_i(x)=\dfrac{e^{p(a_i^Tx-b_i)}}{1+e^{p(c^Tx-\lambda)}+\sum\limits_{j=1}^{m}e^{p(a_j^Tx-b_j)}}$, $i=1,\cdots,m$. 我们可以得到下面的结论：

命题 1 对 $x\in P(\lambda)$, $\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda)$是正定的，$\Phi_p(x,\lambda)$的极小值点 $x(\lambda)\in P(\lambda)$是唯一的.

证明 由 $\sum\limits_{i=0}^{m}u_i(x)<1$ 知 $\mathrm{diag}(u)-u(x)u(x)^T$的所有特征值均为正，故$\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda)$正定. $x(\lambda)\in P(\lambda)$由$\underset{x}{\mathrm{argmin}}\Phi_p(x,\lambda)=\underset{x}{\mathrm{argmin}}\overline{\Phi}_p(x,\lambda)$及 $F(x,\lambda)\leqslant\Phi(x,\lambda)$得到.

注意$\nabla_x^2\overline{\Phi}_p(x,\lambda)$与$\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda)$有相同的形式，但不同的是，对 $\overline{\Phi}(x,\lambda)$, $\sum\limits_{i=0}^{m}u_i(x)\equiv 1$, 故 $\mathrm{diag}(u)-u(x)u(x)^T$有一零特征值.

命题 2 记 $\bar{u}(x)=(u_1(x),\cdots,u_m(x))^T$, $\overline{A}=(a_1,\cdots,a_m)^T$, $\overline{B}=\overline{A}^T(\mathrm{diag}(\bar{u}(x))-\bar{u}(x)\bar{u}(x)^T)\overline{A}$, $B=\overline{B}-u_0(x)((\overline{A}^T\bar{u}(x))c^T+c(\overline{A}^T\bar{u}(x))^T$, 则$\dfrac{1}{p}\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda)=B+u_0(x)(1-u_0(x))cc^T$, 且存在 p_0, 使当 $p\geqslant p_0$ 时, B 是正定的.

命题 2 表明，势函数(3)有同势函数(1)类似的性质，即其 Hessian 可表示为一个对称正定阵和一个与目标函数有关的秩 1 阵的和. 这一性质在发展新的线性规划多项式时间算法以及建立内点法的收敛速度方面有重要作用.

势函数 $\Phi_p(x,\lambda)$把(LP)问题转化为无约束$\underset{x}{\min}\Phi_p(x,\lambda)$问题，其中 λ 可作为同伦参数[2]，并且对取定的 λ, $\Phi_p(x,\lambda)$的 Hessian $\nabla_x^2\Phi_p(x,\lambda)$是对称正定的. 借助同伦路径追踪技术，势函数 $\Phi_p(x,\lambda)$在发展高效线性规划算法方面有重要应用.

作者十分感谢张立卫老师对本文的仔细认真的修改.

参考文献

[1] J. Renegar, *A polynomial—time algorithm based on Newton's method for linear programming*, Math. Prog., 40 (1988), 59—93.

[2] F. Jarre, *On the method of analytic centers for solving smooth convex programs*, Lecture Notes in Mathematics 1405, 1989, 69—85.

[3] 李兴斯，解非线性规划的凝聚函数法，中国科学 · A 辑，(12), 1991, 1283—1288.