第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

正定自共轭矩阵行列式的一个极小值和 Hadamard 不等式的再改进*

刘 建 洲
(湘西民族教育学院，湖南吉首 416000)

摘要 本文，首先按 Dieudonne 意义下行列式给出了正定自共轭矩阵行列式的一个极小值。进而，改进了 Hadamard 不等式，并指出，按谢邦杰意义下行列式，有类似结论，推广了[1]—[4]的结果.

一

用"Q"表示四元数体，"$Q^{m\times n}$"表示 $m\times n$ 阶四元数矩阵集，"$SC_n(Q)$"表示 n 阶四元数自共轭矩阵集；设 $A\in SC_n(Q)$，若无特殊说明，文中总设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是一正整数集，若 $\alpha\subset N$，则有 $\alpha=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，记

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix};$$

A 的谢邦杰意义下的特征值[5]按大小顺序排列为 $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$. $A>0$(或 $A\geqslant 0$)表示 A 正定(或半正定)，若 $A,B\in SC_n(Q)$，$A>B$(或 $A\geqslant B$)表示 $A-B>0$(或 $A-B\geqslant 0$). "$*$"表示共轭转置.

设 $q\in Q$，记 $N(q)=q\bar{q}$，$\bar{q}$ 表示 q 的共轭四元数.

用"det"表示四元数矩阵 Dieudonne 意义下的行列式[6]；"$\|\cdot\|$"表示四元数可中心化非奇异矩阵谢邦杰意义下的行列式[7]. 本文继续延用[2]中 Dieudonne 意义下行列式的"赋值"及其它有关概念.

二

引理 1[8] 设 $A\in SC_n(Q)$，S,T 是 $Q^{1\times n}$ 的子空间，则对任意正整数 t $(1\leqslant t\leqslant n)$，有

$$\lambda_t(A)=\max_{\substack{\dim S=t\\ 0\neq\alpha\in S}}\{\min\frac{\alpha A\alpha^*}{\alpha\alpha^*}\}=\min_{\substack{\dim T=n-t+1\\ 0\neq\alpha\in T}}\{\max\frac{\alpha A\alpha^*}{\alpha\alpha^*}\}.$$

* 1990年10月31日收到.

引理 2 设 $A,B\in SC_n(Q)$，则

$$\lambda_i(A)+\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(A+B)\leqslant\lambda_i(A)+\lambda_1(B),\ i=1,2,\cdots,n.$$

证明 因为

$$\frac{\alpha A\alpha^*}{\alpha\alpha^*}+\max_{0\neq\beta\in Q^{1\times n}}\frac{\beta B\beta^*}{\beta\beta^*}\geqslant\frac{\alpha A\alpha^*}{\alpha\alpha^*}+\frac{\alpha B\alpha^*}{\alpha\alpha^*}=\frac{\alpha(A+B)\alpha^*}{\alpha\alpha^*}$$
$$\geqslant\frac{\alpha A\alpha^*}{\alpha\alpha^*}+\min_{0\neq\beta\in Q^{1\times n}}\frac{\beta B\beta^*}{\beta\beta^*},$$

再由引理 1 立得结论.

引理 3 若 $A\geqslant B\geqslant 0$，则 $\det A\geqslant\det B$.

证明 由[9]知，存在广义酉矩阵 U、V，使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A))U^*,B=V\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\lambda_2(B),\cdots,\lambda_n(B))V^*.$$

由引理 2，对任意正整数 $i(\leqslant n)$ 有

$$\lambda_i(A)=\lambda_i[B+(A-B)]\geqslant\lambda_i(B)+\lambda_n(A-B)\geqslant\lambda_i(B)\geqslant 0.$$

从而由[6](P326－335)知

$$\begin{aligned}\det A&=\det[U\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A))U^*]\\&=\det(UU^*)\det[\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A))]\\&=\prod_{i=1}^{n}\det(\lambda_i(A))=\prod_{i=1}^{n}\sigma(\lambda_i(A))=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^4(A)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^4(B)=\det B.\end{aligned}$$

引理 4 设 $A\in SC_n(Q)$，$A>0$，且分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

这里 A_{11} 和 B_{11} 分别是 A 和 A^{-1} 的 k $(1\leqslant k\leqslant n)$阶主子阵，则有下列关系式：

$$B_{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1};\quad A_{12}A_{22}^{-1}=-B_{11}^{-1}B_{12}.$$

证明 由 $A>0$ 知 $A_{22}>0$，且由 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ 有

$$\begin{cases}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I_k, & (1)\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=0, & (2)\\ B_{11}A_{12}+B_{12}A_{22}=0. & (3)\end{cases}$$

由(1)，(2)得

$$B_{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1};$$

由(3)得

$$A_{12}A_{22}^{-1}=-B_{11}^{-1}B_{12}.$$

引理 5 若 A 如引理 4 所设，则

$$\det B_{11}=\frac{\det A_{22}}{\det A};\quad\det B_{22}=\frac{\det A_{11}}{\det A}.$$

证明 只须证第一个等式即可. 设

$$P=\begin{pmatrix}I_k&-A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I_{n-k}\end{pmatrix}.$$

由[6]易知 $\det P=\det I_k\det I_{n-k}=1$，且

$$PAP^* = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^* & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

由引理 4 有

$$\det A = \det A \cdot \det(PP^*) = \det(PAP^*) = \det A_{22} \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^*)$$
$$= \det A_{22}\det(B_{11}^{-1}) = \det A_{22}(\det B_{11})^{-1}.$$

从而得结论.

定理 1 若 A 如引理 4 所设,则

$$\inf_{Z\in Q^{k\times(n-k)}} \det[(I_k,Z)A(I_k,Z)^*] = \frac{\det A}{\det A_{22}}.$$

证明 注意到 $A_{21}^*=A_{12}$,由引理 4 有

$$(I_k,Z)A(I_k,Z)^* = A_{11} + ZA_{21} + A_{12}Z^* + ZA_{22}Z^*$$
$$= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + (Z + A_{12}A_{22}^{-1})A_{22}(Z + A_{12}A_{22}^{-1})^*$$
$$= B_{11}^{-1} + (Z - B_{11}^{-1}B_{12})A_{22}(Z - B_{11}^{-1}B_{12}) \geqslant B_{11}^{-1}.$$

从而由引理 3 和引理 5 有

$$\det[(I_k,Z)A(I_k,Z)^*] \geqslant \det(B_{11}^{-1}) = \frac{\det A}{\det A_{11}}.$$

取 $Z=B_{11}^{-1}B_{12}$ 即得结论.

在定理 1 中取 $Z=0\in Q^{k\times(n-k)}$,易得

推论 1 若 A 如引理 4 所设,则

$$\det A \leqslant \det A_{11}\det A_{22}.$$

推论 2 设 $A\in SC_n(Q)$,$A>0$,则对 $\alpha\in N$,$\alpha'=N-\alpha$,有

$$\det A \leqslant \det A(\alpha)\det A(\alpha').$$

证明 易知存在置换矩阵 T,使

$$TAT^* = \begin{pmatrix} A(\alpha) & * \\ * & A(\alpha') \end{pmatrix} > 0.$$

由推论 1 有

$$\det A = \det(TAT^*) \leqslant \det A(\alpha)\det A(\alpha').$$

定理 2 设 $A\in SC_n(Q)$,$A>0$,则

$$\frac{\det A(\{1,2,\cdots,n\})}{\det A(\{2,\cdots,n\})} \leqslant \frac{\det A(\{1,3,\cdots,n\})}{\det A(\{3,\cdots,n\})} \leqslant \cdots \leqslant \frac{\det A(\{1,n\})}{\det A(\{n\})} \leqslant \frac{\det A(\{1\})}{1}.$$

证明 由定理 1 有

$$\frac{\det A(\{1,2,\cdots,n\})}{\det A(\{2,\cdots,n\})} = \inf_{\substack{x\in Q\\ y\in Q^{1\times(n-2)}}} (1,x,y)A(1,x,y)^* \leqslant \inf_{y\in Q^{1\times(n-2)}} (1,0,y)A(1,0,y)^*$$
$$= \frac{\det A(\{1,3,\cdots,n\})}{\det A(\{3,\cdots,n\})}.$$

其余不等式类似可证.

三

定理 3 设 $A\in SC_n(Q)$，$A>0$，$\alpha,\beta\subset N$，且 $\alpha\cup\beta=N$，则（这里约定 $\det A(\varnothing)=1$）.

$$\det A(\alpha\cup\beta)=\det A\leqslant\frac{\det A(\alpha)\det A(\beta)}{\det A(\alpha\cap\beta)}.$$

证明 设 $\alpha'=N-\alpha$，$\beta'=N-\beta$，由 $\alpha\cup\beta=N$ 知 $\alpha'\cap\beta'=\varnothing$，$N-(\alpha'\cup\beta')=\alpha\cap\beta$，而显然 $A^{-1}(\alpha'\cup\beta')$ 是一正定自共轭矩阵，由推论 2 有

$$\det A^{-1}(\alpha'\cup\beta')\leqslant\det A^{-1}(\alpha')\det A^{-1}(\beta').$$

由引理 5，上不等式就是

$$\frac{\det A(\alpha\cap\beta)}{\det A}\leqslant\frac{\det A(\alpha)}{\det A}\frac{\det A(\beta)}{\det A},$$

由此立得结论.

定理 4 设 $A\in SC_n(Q)$，$A>0$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\subset N$，且对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant m)$ 有

$$(\alpha_1\cup\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_{k-1})\cap\alpha_k=\alpha_{\sigma(k)}\cap\alpha_k,\sigma(k)<k,$$

则（约定 $\det A(\varnothing)=1$）

$$\det A(\alpha_1\cup\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_m)\leqslant\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\det A(\alpha_i)}{\prod\limits_{i=2}^{m}\det A(\alpha_{\sigma(i)}\cap\alpha_i)}.$$

证明 当 $m=2$ 时，就是定理 3，不等式成立. 假设 $m=t$ 时，不等式成立，当 $m=t+1$ 时，由所设条件及归纳假设有

$$\begin{aligned}\det A(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t\cup\alpha_{t+1})&\leqslant\frac{\det A(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t)\det A(\alpha_{t+1})}{\det A[(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t)\cap\alpha_{t+1}]}\\&=\frac{\det A(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t)\det A(\alpha_{t+1})}{\det A(\alpha_{\sigma(t+1)}\cap\alpha_{t+1})}\\&\leqslant\frac{\prod\limits_{i=1}^{t+1}\det A(\alpha_i)}{\prod\limits_{i=2}^{t+1}\det A(\alpha_{\sigma(i)}\cap\alpha_i)}.\end{aligned}$$

推论 3 设 $A\in SC_n(Q)$，$A>0$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\subset N$，且对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant m)$ 有

$$(\alpha_1\cup\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_{k-1})\cap\alpha_k=\alpha_{k-1}\cap\alpha_k,$$

则

$$\det A(\alpha_1\cup\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_m)\leqslant\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\det A(\alpha_i)}{\prod\limits_{i=1}^{m-1}\det A(\alpha_i\cap\alpha_{i+1})}.$$

证明 只要在定理 4 中取 $\sigma(k)=k-1$ 即得.

推论 4 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$，$A>0$，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，则

$$\det A\leqslant\varphi\Big(a_{i_1i_1}\prod_{j=2}^{n}\big(a_{i_ji_j}-a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}N(a_{i_ji_{\sigma(j)}})\big)\Big),$$

其中 $\sigma(j)<j$.

证明 在定理4中取 $\alpha_t=\{i_t, i_{\sigma(t)}\}$, $t=2,3,\cdots,n$,注意到 $\sigma(2)=1$ 和对任意自然数 j $(3\leqslant j\leqslant n)$ 有 $\sigma(\sigma(j))<\sigma(j)<j$,有

$$(\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_{j+1})\cap\alpha_j=\alpha_{\sigma(j)}\cap\alpha_j=\sigma(j).$$

再注意到

$$\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}a_{i_ji_{\sigma(j)}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i_ji_j} & a_{i_ji_{\sigma(j)}}\\ a_{i_{\sigma(j)}i_j} & a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a_{i_{\sigma(j)}i_j}a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}} & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{i_ji_j}-a_{i_{\sigma(j)}i_j}a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}a_{i_ji_{\sigma(j)}} & 0\\ 0 & a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}\end{pmatrix},$$

从而有

$$\det\begin{pmatrix}a_{i_ji_j} & a_{i_ji_{\sigma(j)}}\\ a_{i_{\sigma(j)}i_j} & a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}\end{pmatrix}=\varphi(a_{i_ji_j}-a_{i_{\sigma(j)}i_j}a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}a_{i_ji_{\sigma(j)}})\cdot\varphi(a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}})$$
$$=\varphi(a_{i_ji_j}a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}-N(a_{i_ji_{\sigma(j)}})).$$

所以,由定理4有

$$\det A\leqslant\prod_{j=2}^{n}\det A(\alpha_j)\Big/\prod_{j=3}^{n}\det A(\alpha_j\cap\alpha_{\sigma(j)})=\varphi\Big(\prod_{j=3}^{n}a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}\Big)\cdot\varphi\Big(\prod_{j=2}^{n}(a_{i_ji_j}a_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}-N(a_{i_ji_{\sigma(j)}}))\Big)$$
$$=\varphi\Big(a_{i_1i_1}\prod_{j=2}^{n}(a_{i_ji_j}-a^{-1}_{i_{\sigma(j)}i_{\sigma(j)}}N(a_{i_ji_{\sigma(j)}}))\Big).$$

推论5 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$, $A>0$,则

$$\det A\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi\Big(a_{ii}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_{jj}-a_{ii}^{-1}N(a_{ij}))\Big).$$

证明 对任意正整数 i $(1\leqslant i\leqslant n)$,只须在定理4中取

$$\alpha_t=\begin{cases}\{i,t\} & 1\leqslant t\leqslant i-1,\\ \{i,t+1\} & i\leqslant t\leqslant n-1\end{cases}$$

即可.

注 推论4为文[4]的结果,推论5为文[2],[3]的结果.

推论6 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$, $A>0$,则

$$\det A\leqslant\varphi\Big(\prod_{i=1}^{n-1}(a_{ii}a_{i+1,i+1}-N(a_{i,i+1}))\Big)\Big/\varphi\Big(\prod_{i=2}^{n-1}a_{ii}\Big).$$

证明 在定理4中取 $\alpha_i=\{i,i+1\}$, $i=1,2,\cdots,n-1$,即可.

推论7 设 $A\in SC_n(Q)$, $A>0$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\subset N$,且 $\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_m=N$, $\alpha_i\cap\alpha_j=\varnothing$ $(i\neq j)$,则

$$\det A\leqslant\prod_{i=1}^{m}\det A(\alpha_i).$$

证明 由定理4,这是明显的.

四

我们考虑前面四元数矩阵 Dieudonne 意义下行列式的有关不等式的证明过程,容易知道,所有证明皆适合于四元数自共轭矩阵谢邦杰意义下的行列式.因此,对谢邦杰意义下的行列

式，以上所有定理及推论都有相应的形式，实际上，只要将符号“det”改为“‖ · ‖”，“φ”去掉即可，不再详述.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰，Hadamard 定理在四元数体上的推广，中国科学，数学专辑，1(1979)，88—93.

[2] 屠伯埙，Hadamard 定理在四元数除环上的改进，数学学报，1(1987)，120—124.

[3] 姜志生、孙玉祥，正定自共轭矩阵行列式的含参数的上界，数学的实践与认识，1(1990)，90—92.

[4] 孙玉祥、姜志生，关于 Hadamard 不等式的再改进，应用数学，2(1990)，79—82.

[5] 谢邦杰，体上矩阵的特征根与标准形式的应用，数学学报，4(1980)，522—533.

[6] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

[7] 谢邦杰，自共轭四元数矩阵的行列式的展开定理及其应用，数学学报，5(1980)，668—683.

[8] 庄瓦金，四元数矩阵的特征值与奇异值不等式，数学进展，4(1988)，403—406.

[9] 谢邦杰，任意体上的可中心化矩阵的行列式，吉林大学学报(自然科学版)，3(1980)，1—33.

A Minimal Value of Determinant of Positive Definite Self-Conjuate Matrices and Improvements of the Hadamard Inequality

Liu Jianzhou

(Xiangxi National Teacher's Education College, Jishou, Hunan)

Abstract

We give a minimal value of determinant of Dieudonne's meaning of positive definite self-conjugate matrices and improve the Hadamard inequality. These generalize all results in [1-4].