第14卷第1期
1994年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 1
Feb. 1994

关于从属的若干注记*

杨定恭
(苏州大学数学系，215006)

设 H 表示单位圆盘 $U=\{z:|z|<1\}$ 内解析函数的全体；A_n 是 H 中形如 $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots$ 的 $f(z)$ 组成的类，这里 n 是正整数. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 H 中，$(f*g)(z)$ 表示 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 Hadamard 乘积或卷积；$f(z)\prec g(z)$ 表示 $f(z)$ 在 U 内从属于 $g(z)$. 本文的目的是利用卷积和微分从属导出一些新结果，其中包括对已知结果的改进.

我们需要以下两个引理.

引理1[1] 设 $h(z)\in H$ 是凸单叶的且 $h(0)=a$, $p(z)=a+p_nz^n+p_{n+1}z^{n+1}+\cdots\in H$. 若 $p(z)+\frac{1}{c}zp'(z)\prec h(z)$，这里 c 为非零复数且 $\mathrm{Re}c\geqslant 0$，则 $p(z)\prec\frac{c}{n}z^{-\frac{c}{n}}\int_0^z h(t)t^{\frac{c}{n}-1}dt$.

引理2[2] 设 H 中函数 $g(z)$ 和 $h(z)$ 是凸单叶的，$\varphi(z)$ 在 H 中且 $\varphi(0)=g(0)$. 若 $\varphi(z)\prec g(z)$，则 $(h*\varphi)(z)\prec(h*g)(z)$.

本文第一个定理推广并精确化了文献[3]中的结果.

定理1 设 $f(z)\in A_n$ 在 U 内满足条件 $|f'(z)-1|<1-\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$，则在 U 内有准确的结果：(i) $\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}>1-\frac{1-\alpha}{n+1}$ 和 (ii) $\mathrm{Re}\{e^{i\beta}\frac{f(z)}{z}\}>0$，这里 $|\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin(\frac{1-\alpha}{n+1})$.

证明 设 $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\in A_n$ 在 U 内满足 $|f'(z)-1|<1-\alpha$. 置 $p(z)=\frac{f(z)}{z}$，则 $p(z)=1+a_{n+1}z^n+\cdots\in H$ 满足 $p(z)+zp'(z)=f'(z)\prec 1+(1-\alpha)z$. 于是引理1产生

$$\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{n}z^{-\frac{1}{n}}\int_0^z(1+(1-\alpha)t)t^{\frac{1}{n}-1}dt=1+\frac{1-\alpha}{n+1}z.$$

从而 $\frac{f(z)}{z}=1+\frac{1-\alpha}{n+1}w(z)$，这里 $w(z)\in H$ 且 $|w(z)|\leqslant|z|^n$. 由此易得

$$\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}\geqslant 1-\frac{1-\alpha}{n+1}|z|^n>1-\frac{1-\alpha}{n+1}$$

和

$$|\arg\{e^{i\beta}\frac{f(z)}{z}\}|\leqslant|\beta|+|\arg\frac{f(z)}{z}|\leqslant|\beta|+\arcsin(\frac{1-\alpha}{n+1}|z|^n)<\frac{\pi}{2}$$

如果 $|\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin(\frac{1-\alpha}{n+1})$.

其次，容易验证 $f(z)=z+\frac{1-\alpha}{n+1}z^{n+1}$ 为本定理的极值函数. 证毕.

定理2 设 $p(z)=1+p_nz^n+p_{n+1}z^{n+1}+\cdots\in H$ 在 U 内满足条件 $\mathrm{Re}\{p(z)+\alpha zp'(z)\}>\rho$，这里

* 1991年2月24日收到.

$\alpha>0$ 和 $\rho<1$,则在 U 内有准确的估计

$$\mathrm{Re}p(z)>\frac{1}{n\alpha}\int_0^1\frac{1-(1-2\rho)u}{1+u}u^{\frac{1}{n\alpha}-1}du.$$

应用引理 1.即可证明定理 2,且当 $n=1$ 和 $\rho=0$ 的特例精确化了已知结果:

$$\alpha>0,\ \mathrm{Re}\{p(z)+\alpha zp'(z)\}>0\Rightarrow\mathrm{Re}p(z)>0.$$

定理 3 设 $f(z)\in A_n$ 在 U 内满足条件

$$\mathrm{Re}\{f'(z)+zf''(z)\}>\rho_n, \tag{1}$$

这里 $\rho_n=[-\frac{2}{n^2}\int_0^1\int_0^1\frac{(uv)^{\frac{1}{n}-1}}{1+uv}dudv-1]/[2(2-\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1\frac{(uv)^{\frac{1}{n}-1}}{1+uv}dudv)]$,则函数 $f(z)$ 是星形单叶的.

证明 显然 $\rho_n<0$. 因为 $f'(z)+zf''(z)\prec\frac{1-(1-2\rho_n)z}{1+z}$,应用引理 1 有 $f'(z)\prec h(z)$,这里 $h(z)=\frac{1}{n}z^{-\frac{1}{n}}\int_0^z(\frac{1-(1-2\rho_n)t}{1+t})t^{\frac{1}{n}-1}dt$ 是凸单叶的. 令 $p(z)=\frac{1}{z}\int_0^z f'(t)dt$,再用引理 1 导致

$$\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1(\frac{1-(1-2\rho_n)zuv}{1+zuv})(uv)^{\frac{1}{n}-1}dudv$$

从而

$$\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}>(2\rho_n-1)+\frac{2(1-\rho_n)}{n^2}\int_0^1\int_0^1\frac{(uv)^{\frac{1}{n}-1}}{1+uv}d\quad>0. \tag{2}$$

置

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1-w(z)}{1+w(z)}, \tag{3}$$

$w(z)$ 在 U 内解或亚纯且 $w(0)=0$. 从(3)可得

$$f'(z)+zf''(z)=\frac{f(z)}{z}[(\frac{1-w(z)}{1+w(z)})^2-\frac{2zw'(z)}{(1+w(z))^2}]. \tag{4}$$

我们证明 $w(z)\in H$ 且 $|w(z)|<1$. 假若不然,必存在 z_0,$0<|z_0|<1$,当 $|z|\leqslant|z_0|$ 时 $w(z)$ 解析且 $|w(z)|\leqslant|w(z_0)|=1$. 根据熟知的 Jack 引理有 $z_0w'(z_0)=\lambda w(z_0)$,$\lambda$ 为实数且 $\lambda\geqslant1$. 现在从(4)和(2)推出

$$\mathrm{Re}\{f'(z_0)+z_0f''(z_0)\}=\mathrm{Re}\{\frac{f(z_0)}{z_0}[(\frac{1-w(z_0)}{1+w(z_0)})^2-\frac{2\lambda w(z_0)}{(1+w(z_0))^2}]\}\leqslant-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{f(z_0)}{z_0}$$

$$<-\frac{1}{2}[(2\rho_n-1)+\frac{2(1-\rho_n)}{n^2}\int_0^1\int_0^1\frac{(uv)^{\frac{1}{n}-1}}{1+uv}dudv]=\rho_n.$$

但这与(1)是矛盾的. 于是(3)表明 $f(z)$ 是星形单叶函数. 证毕.

注意 $\rho_1\approx-0.27$,定理 3 当 $n=1$ 的特例是文献[4]中相应结果的改进.

定理 4 设 $h(z)\in H$ 是凸单叶的,$p(z)\in H$ 且 $p(0)=h(0)=1$. 如果 $p(z)\prec h(z)$,则

$$p(r_\alpha z)+\alpha r_\alpha zp'(r_\alpha z)\prec h(z), \tag{5}$$

这里 $r_\alpha=\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha$ 和 $\alpha>0$. 当 $h(z)=\frac{1+cz}{1-z}$,$c\neq1$,界限 r_α 是准确的.

证明 置 $f(z)=(1-\alpha)\frac{z}{1-z}+\alpha\frac{z}{(1-z)^2}$,则

$$p(z) + \alpha z p'(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right) * p(z). \tag{6}$$

我们要证明对 $z \in U$ 有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f(r_\alpha z)}{r_\alpha z}\right\} > \frac{1}{2}. \tag{7}$$

设 $\frac{1}{1-z} = \mathrm{Re}^{i\theta}$ 和 $|z| = r < 1$，则

$$\frac{1}{1+r} \leqslant R \leqslant \frac{1}{1-r}, \quad \cos\theta = \frac{1 + (1-r^2)R^2}{2R}. \tag{8}$$

借助(8)，当 $z \in U$ 有

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2}\right\} &= 2\alpha R^2\cos 2\theta + 2(1-\alpha)R\cos\theta - 1 \\ &= \alpha(1-r^2)^2R^4 - [2\alpha r^2 - (1-\alpha)(1-r^2)]R^2 \\ &\geqslant R^2(-r^2 - 2\alpha r + 1). \end{aligned}$$

若 $r < r_\alpha$，则上式右端大于零，从而(7)成立.

现在利用 Herglotz 公式 $\frac{f(r_\alpha z)}{r_\alpha z} = \int_{|x|=1} \frac{d\mu(x)}{1 - xz}$，这里 $\mu(x)$ 是 $|x|$ 上适合 $\int_{|x|=1} d\mu(x) = 1$ 的概率测度，从(6)可得 $p(r_\alpha z) + \alpha r_\alpha z p'(r_\alpha z) = \int_{|x|=1} p(xz)d\mu(x)$. 因为 $p(z)$ 在 U 内从属于凸单叶函数 $h(z)$，上式给出(5).

当 $h(z) = \frac{1+cz}{1-z}$，$c \neq -1$，取 $p(z) = \frac{1+cz}{1-z}$，有

$$p(-r_\alpha) - \alpha r_\alpha p'(-r_\alpha) = \frac{-cr_\alpha^2 - (\alpha(c+1) + c - 1)r_\alpha + 1}{(1+r_\alpha)^2} = \frac{1-c}{2}.$$

由此可见使从属关系(5)成立的界限 r_α 不能再大. 证毕.

定理 5 设 $h(z) \in A_1$ 是凸单叶的，$p(z) \in H$ 且 $p(0) = 0$，若

$$cp(z) + zp'(z) = \lambda h(z), \tag{9}$$

这里 $c > 0$，则

(i) 对每一 λ，$0 < \lambda \leqslant \lambda_c$，有 $p(z) \prec h(z)$，这里 $\lambda_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - \int_0^1 \frac{u^{c-1}}{1+u}du\right)^{-1}$ 且不能再大；

(ii) 对每一 λ，$\lambda > \lambda_c$，有 $p(r_0 z) \prec h(z)$，这里 r_0 是方程 $\int_0^1 \frac{u^{c-1}}{1+ru}du - \frac{1}{c} + \frac{1}{2\lambda} = 0$ 在 $(0,1)$ 内的根，且界限 r_0 不能再大.

证明 置 $\varphi(z) = \frac{\lambda}{z^c}\int_0^z \frac{t^c}{1-t}dt$，则(9)写成 $p(z) = (h * \varphi)(z)$.

(i) 设 $0 < \lambda \leqslant \lambda_c$，我们有

$$\operatorname{Re}\varphi(z) = \lambda \operatorname{Re}\left\{\int_0^1 \frac{zu^c}{1-zu}du\right\} = \lambda \operatorname{Re}\left\{\int_0^1 \frac{u^{c-1}}{1-zu}du - \frac{1}{c}\right\} > -\frac{\lambda}{2\lambda_c} \geqslant -\frac{1}{2},$$

从而 $\varphi(z) \prec \frac{z}{1-z}$. 于是应用引理 2 得 $p(z) \prec h(z) * \frac{z}{1-z} = h(z)$.

函数 $h(z) = \frac{z}{1-z}$ 表明界限 λ_c 是最佳的. 因为这时 $p(z) = \varphi(z)$，若 $\lambda > \lambda_c$，则

$$p(-1) = \lambda\left(\int_0^1 \frac{u^{c-1}}{1+u}du - \frac{1}{c}\right) < -\frac{1}{2},$$

因此 $p(z)$ 在 U 内不再从属于 $h(z)$.

(ii) 设 $\lambda>\lambda_c$. 在这种情形下方程 $q(r)=\int_0^1\frac{u^{c-1}}{1+ru}du-\frac{1}{c}+\frac{1}{2\lambda}=0$ 在 $(0,1)$ 内恰有一根 r_0, 由于在 U 内有 $\mathrm{Re}\varphi(r_0z)>\lambda\left(\int_0^1\frac{u^{c-1}}{1+r_0u}du-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{2}$, 引理 2 产生 $p(r_0z)=h(z)*\varphi(r_0z)\prec h(z)$.

其次, 仍考虑 $h(z)=\frac{z}{1-z}$. 若 $r_0<r<1$, 则 $p(-r)=\lambda\left(\int_0^1\frac{u^{c-1}}{1+ru}du-\frac{1}{c}\right)<-\frac{1}{2}$, 故 $p(rz)\not\prec h(z)$. 定理证完.

显然 $\lambda_c>c$, 定理 5(i) 是文献[5]中相应结果的精确化. 用同样的方法还可使[5]中某些结果变为精确, 不赘述.

最后, 利用证明定理 5(ii) 的方法可得

推论 设 $h(z)\in A_1$ 是凸单叶的, $p(z)\in H$ 且 $p(0)=0$. 若 $zp'(z)=h(z)$, 则 $p(r_0z)\prec h(z)$, 这里 $r_0=\sqrt{e}-1$ 且不能再大.

参 考 文 献

[1] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Michigan Math. J. 28(1981), 157—171.

[2] S. Ruscheweyh and T. Sheil—Small, Comment. Math. Helv. 48(1973), 119—135.

[3] S. Owa, M. K. Aouf and M. A. Nasr, Internat. J. Math. & Math. Sci. 13(1990), 189—192.

[4] S. Singh and R. Singh, Indian J. Pure Appl. Math. 13(1982), 190—194.

[5] S. D. Bernardi, Duke Math. J. 33(1966), 55—67.

Some Notes on Subordination

Yang Dinggong
(Dept. of Math., Suzhou University)

Abstract

In this paper, among other things, we prove the following results:

Theorem 1 *Let $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ be analytic and satisfy $|f'(z)-1|<1-\alpha$, $0\le\alpha<1$, for $|z|<1$. Then $Re\{e^{i\beta}\frac{f(z)}{z}\}>0$, where $|\beta|\le\frac{\pi}{2}-\arcsin(\frac{1-\alpha}{n+1})$. The result is sharp.*

Theorem 4 *Let $p(z)$ be analytic and $h(z)$ be convex univalent in $|z|<1$ with $p(0)=h(0)=1$. If $f(z)\prec h(z)$, then $p(I_\alpha z)+\alpha r_\alpha zp'(r_\alpha z)\prec h(z)$, where $r_\alpha=\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha$ and $\alpha>0$.*

Theorem 5 *Let $p(z)$ be analytic and $h(z)=z+\cdots$ be convex univalent in $|z|<1$. If $cp(z)+zp'(z)=\lambda h(z), c>0$, then (i) for every $\lambda, 0<\lambda\le\lambda_c=\frac{1}{2}(\frac{1}{c}-\int_0^1\frac{u^{c-1}}{1+u}du)^{-1}, p(z)\prec h(z)$; (ii) For every $\lambda,\lambda>\lambda_c, p(r_0z)\prec h(z)$, where r_0 is the root in (0,1) of the equation $\int_0^1\frac{u^{c-1}}{1+ru}du-\frac{1}{c}+\frac{1}{2\lambda}=0$. The results are sharp.*