第14卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 1
1994年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1994

可平面图完备色数唯一性问题*

赵　克　文
（华南师范大学数学系，广州 510631）

我们已经知道，图的点色数、边色数，点边全色数 x_T 都是唯一的．那么，可平面图的边面完备色数 x_e 唯一吗[2]？本文对此有结论：并非每一可平面图的完备色数都唯一．由此就产生问题：$x_e(G)$ 唯一的可平面图 G 的充要条件是什么？本文对此问题的研究，得到下列结果：

定理 1　树图 T 的 $x_e(T)$ 是唯一的，且有

$$x_e(T)=\begin{cases}4 & \text{当 } |V(G)|=2 \text{ 时},\\ \Delta(T)+2 & \text{当 } |V(T)|>2 \text{ 时},\end{cases}$$

定理 2　圈图 C_n 的 $x_e(C_n)$ 是唯一的，且有 $x_e(C_n)=x_T(C_n)+2$，

定理 3　可平面图 G 是两个只有一个公共点的圈，则 $x_e(G)$ 唯一，且 $x_e(G)=x_T(G)+1$．

然而却有：

定理 3′　可平面图 G 是 $n(n\geqslant 3)$ 个只有一个公共点的圈，且除此公共点外，任两圈均无其它公共点，则 $x_e(G)$ 不唯一．

定理 4　可平面图 G 只含一个圈，有不在圈上的点 u，使 $d(u)=\Delta(G)$，则 $x_e(G)$ 唯一，且有 $x_e(G)=\Delta(G)+2$ $(\Delta(G)\geqslant 4)$．

与此定理相反的有

定理 4′　可平面图 G 只含一个圈，且不在圈上的任一点 u，均有 $d(u)<\Delta(G)$ $(\Delta(G)\geqslant 4)$，则 $x_e(G)$ 不唯一．

定理 5　可平面图 G 只含两个圈，有不在圈上的点 u，使 $d(u)=\Delta(G)$．则 $x_e(G)$ 唯一，且有 $x_e(G)=\Delta(G)+2(\Delta(G)\geqslant 4)$．

与此定理相反的也有：

定理 5′　可平面图 G 只含两个圈，且不在圈上的任一点 u，均有 $d(u)<\Delta(G)$ $(\Delta(G)\geqslant 4)$，则 $x_e(G)$ 不唯一．

以上可平面图均指连通的，不连通的同样可有类似结果．本文涉及定义可参见所附文献．

参　考　文　献

[1]　J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press, Ltd, 1976.

[2]　张忠辅、王建方、王维凡，若干平面图的完备色数，新疆大学学报，1(1991).

[3]　张忠辅、王建方、张建勋，若干图的全染色，中国科学 A 辑，6(1988)，595—600.

* 1991年8月9日收到.