第14卷第1期
1994年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 1
Feb. 1994

关于有效点集的闭性和连通性*

傅 万 涛
(南昌大学，南昌 330047)

摘要 本文的主要结果是，假设A是局部凸空间里的紧的F—集，则A的有效点集$E(A|C)$是闭集. 需要提及的是，此结果中关于A并没有作任何凸性的假设，如果对它再附加某种凸性假设条件时，则本文进一步证明了有效点集$E(A|C)$不但是闭集，而且还是连通集.

关键词 有效点集、F—集，连通集

一. 导 引

一般说来，集合A的弱有效点集总是闭的，但是有效点集不一定为闭. 于是讨论有效点集的闭性问题，是多目标规划问题的结构理论中，一个很困难的问题. 另一方面，因为有效点集的许多拓扑性质，例如连通性，是与它的闭性直接相关的，因此研究有效点集的闭性，又是结构理论中一个很重要的课题. 到目前为止，有关闭性的结果还不多见. 1985年，匈牙利数学家Luc在有限维空间R^n里证明了C—严格拟凸集的有效点集是闭的(文献[1])，随后在他的专著中又证明了，若有效点集为收缩核时，则它是闭集(文献[2]). 从这几个结果看出，他都假设了很强的凸性条件，事实上对于多数集合说来都不能满足这种凸性条件. 本文完全没有考虑任何凸性的条件，证明了在无限维空间中有效点集是闭的结论. 如果再附加一定的凸性假设时，本文进一步证明了有效点集不但是闭的，而且还是连通的集.

二. 辅助引理

设X是Hausdorff局部凸空间，C是X中的闭凸锥，我们称锥C满足尖条件，如果存在一个闭凸锥$A\subset X$，使得

$$\begin{cases} C\setminus\{0\}\subset \mathrm{int}A, \\ 0\notin \mathrm{int}A. \end{cases} \tag{1}$$

例如有限空间R^n中的非负座标锥R^n_+满足尖条件；又如任意一个有基底的锥满足尖条件. 因为若锥C有基底，则存在$0\neq f\in X^*$(X的对偶空间)，使得$f(x)>0, \forall\ 0\neq x\in C$. 则令$A=\{x\in X: f(x)\geqslant 0\}$，$A$是一个闭凸锥，而且满足尖条件(1). 由此看来，尖条件是一个很普通的条件，对于多数平常出现的锥都能满足.

不难看出，如果C满足尖条件(1)，则C是点锥，即$C\cap(-C)=\{0\}$. 在此还需特别提及一

* 1991年12月4日收到，江西自然科学基金资助.

点，尖条件中并没有要求 C 本身存在内点.

现在假设闭凸锥满足尖条件(1)，随意取一个元素 $e\in C\setminus\{0\}$，定义函数 $g:X\to \boldsymbol{R}$ 为

$$g(y)=\inf\{\lambda\in \boldsymbol{R}:y\in \lambda e-A\},\ y\in X. \tag{2}$$

首先，由 $e\in \mathrm{int}A$ 可得，数集 $\{\lambda\in \boldsymbol{R}:y\in\lambda e-A\}$ 非空. 其次因为 $0\notin \mathrm{int}A$，所以应用分离定理得，存在 $0\neq f\in X^*$，使得

$$f(A)\geqslant 0,\text{和 } f(\mathrm{int}A)>0.$$

由于 $e\in \mathrm{int}A$，则 $f(e)>0$. 现在证明数 $\lambda^*=f(y)/f(e)$ 是数集 $\{\lambda\in \boldsymbol{R}:y\in\lambda e-A\}$ 的一个下界，随之即可知(2)式下确界存在.

事实上如果 λ^* 不是数集 $\{\lambda\in \boldsymbol{R}:y\in\lambda e-A\}$ 的下界，则对某 $\lambda<\lambda^*$，还有 $y\in\lambda e-A$，或 $\lambda e-y\in A$，从而 $f(\lambda e-y)\geqslant 0$；但另一方面

$$f(\lambda e-y)=\lambda f(e)-f(y)<\lambda^* f(e)-f(y)=0,$$

矛盾!

下面讨论函数 g 的某些性质.

引理 1 $\forall\, y\in X, y\in g(y)e-A$.

证明 $\forall\,\varepsilon>0$，由(2)式定义得，$y\in(g(y)+\varepsilon)e-A$，因为 A 是闭锥，所以令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$y\in g(y)e-A.$$

从该引理即可推出，$\forall\, y_1,y_2\in X,\alpha,\beta\geqslant 0$，

$$g(\alpha y_1+\beta y_2)\leqslant \alpha g(y_1)+\beta g(y_2). \tag{3}$$

事实上，依引理 1，$y_1\in g(y_1)e-A$，$y_2\in g(y_2)e-A$，从而也有

$$\alpha y_1+\beta y_2\in(\alpha g(y_1)+\beta(g(y_2))e-(\alpha A+\beta A)\subset(\alpha g(y_1)+\beta g(y_2))e-A.$$

再由(2)式定义得，$g(\alpha y_1+\beta y_2)\leqslant\alpha g(y_1)+\beta g(y_2)$.

引理 2 设 $y\in X, t\in \boldsymbol{R}$，则

$$g(y)<t\Leftrightarrow y\in te-\mathrm{int}A.$$

证明 设 $g(y)<t$，则 $\exists\, t_0\in \boldsymbol{R}$，使得 $g(y)<t_0<t$，于是

$$y\in t_0e-A=te-(t-t_0)e-A\subset te-\mathrm{int}A-A\subset te-\mathrm{int}A.$$

反之，设 $y\in te-\mathrm{int}A$. 考虑到 $te-\mathrm{int}A$ 是一个开集，而且包含元素 y，因此对元素 e 说来，$\exists\, t_0>0$，使得 $y+t_0e\in te-\mathrm{int}A\subset te-A$，或 $y\in(t-t_0)e-A$，再由(2)式的下确界定义，$g(y)\leqslant t-t_0<t$.

引理 3 函数 g 是严格单调增加函数，即 $\forall\, y_1,y_2\in X, y_1\in y_2-C/\{0\}$，则

$$g(y_1)<g(y_2).$$

证明 因为 $y_1\in y_2-C/\{0\}\subset y_2-\mathrm{int}A$，以及引理 1 和 $y_2\in g(y_2)e-A$，所以

$$y_1\in y_2-\mathrm{int}A\subset g(y_2)e-A-\mathrm{int}A\subset g(y_2)e-\mathrm{int}A,$$

最后应用引理 2 得，$g(y_1)<g(y_2)$.

引理 4 函数 g 是连续函数.

证明 设网 $\{y_\tau:\tau\in I\}\subset X, y_\tau\to y\in X$. 我们要证 $g(y_\tau)\to g(y)$.

$\forall\,\varepsilon>0$，因为 $g(y)<g(y)+\varepsilon$，所以由引理 2 得

$$y\in(g(y)+\varepsilon)e-\mathrm{int}A.$$

考虑到集合 $(g(y)+\varepsilon)e-\mathrm{int}A$ 是一个开集，并包含 y，即它是 y 的一个邻域，因此 $\exists\,\tau_1\in I$，使得

$$y_\tau \in (g(y)+\varepsilon)e - \mathrm{int}\Lambda, \text{ 当 } \tau \geqslant \tau_1 \text{ 时}.$$

由引理 2 得

$$g(y_\tau) < g(y) + \varepsilon, \text{ 当 } \tau \geqslant \tau_1 \text{ 时}. \tag{4}$$

其次，因为由(2)式的下确界定义知，$\forall\ \varepsilon>0, y \notin (g(y)-\varepsilon)e-\Lambda$，注意到集合$(g(y)-\varepsilon)e-\Lambda$的闭性，所以 y 存在一个邻域 U，使得

$$U \cap (g(y)-\varepsilon)e - \Lambda) = \varnothing.$$

然而 $y_\tau \to y$，则 $\exists\ \tau_2 \in I$，使得当 $\tau \geqslant \tau_2$ 时，$y_\tau \in U$，随之有 $y_\tau \notin (g(y)-\varepsilon)e-\Lambda$，依(2)式的下确界定义得

$$g(y_\tau) > g(y) - \varepsilon, \text{ 当 } \tau \geqslant \tau_2 \text{ 时}. \tag{5}$$

现在令 $\tau^* \in I, \tau^* \geqslant \tau_1, \tau_2$，联合(4)和(5)得到

$$g(y) - \varepsilon < g(y_\tau) < g(y) + \varepsilon, \text{当 } \tau \geqslant \tau^* \text{ 时}.$$

即 $g(y_\tau) \to g(y)$.

引理 5 设 E_1 和 E_2 是两个 Hausdorff 局部凸空间，集值映射 $F: E_1 \to E_2, G: E_1 \to E_2$ 使得$\forall\ x \in E_1, F(x) \cap G(x) \neq \varnothing$，再设

(i) F 在 $x_0 \in E_1$ 上半连续；

(ii) $F(x_0)$是紧集；

(iii) G 是一个闭映射.

则交映射 $F \cap G: x \to F(x) \cap G(x)$在 x_0 为上半连续的.

证明可参看 Aubin[3]，p. p. 110，Th. 8.

三. 有效点集的闭性

仍设 X 是 Hausdorff 局部凸空间，C 是 X 里的满足尖条件的闭凸锥，再设 $\Lambda \subset X$ 是一个紧集. 我们称 $\bar{x} \in \Lambda$ 是 Λ 的有效点，如果不存在 $x \in \Lambda, x \in \bar{x} - C/\{0\}$，$\Lambda$ 的所有有效点组成的集记为 $E(\Lambda|C)$，并称为有效点集. 为了证明 $E(\Lambda|C)$为闭集，在下首先给出一个关于闭集的一般结论.

定理 1 设 X 是 Hausdorff 局部凸空间，Λ 是 X 的闭子集，$E \subset \Lambda$. 如果存在一个集值映射 $H: \Lambda \to E$，使之满足下条件：

(i) H 在 Λ 上是上半连续的；

(ii) $\forall\ x \in E, x \in H(x)$；

(iii) $\forall\ x \in \Lambda$，值 $H(x)$为闭集.

则 E 为闭集.

证明 设网$\{x_\tau: \tau \in I\} \subset E, x_\tau \to x \in \Lambda$，要证 $x \in E$. 因为 H 在 x 为上半连续的，所以对$\forall$ 开集 $O \supset H(x)$，存在 x 的邻域 $U(x)$，使得

$$H(y) \subset O, \ \forall\ y \in U(x).$$

考虑到 $x_\tau \to x$，则$\exists\ \tau^* \in I$，使得当 $\tau \geqslant \tau^*$ 时，$x_\tau \in U(x)$，随之有

$$H(x_\tau) \subset O, \text{ 当 } \tau \geqslant \tau^* \text{ 时}.$$

又因为每个 $x_\tau \in E$，所以依所设条件(ii)，有

$$x_\tau \in H(x_\tau) \subset O, \text{ 当 } \tau \geqslant \tau^* \text{ 时}.$$

由此推得$\{x_\tau\}$的极限$x\in\overline{O}$. 则

$$x\in\bigcap\{\overline{O}:O\text{ 为 }H(x)\text{ 的开邻域}\}=\overline{H(x)}=H(x).$$

最后再注意到值$H(x)\subset E$,因此

$$x\in H(x)\subset E.$$

证毕.

根据该定理,为了证明有效点集$E(A|C)$的闭性,只需要构造一个满足定理条件的集值映射H.

对$\forall\ x\in A$,令$A(x)=(x-C)\bigcap A$,以及

$$a(x)=\min\{g(z):z\in A(x)\},\tag{6}$$

$$H(x)=\{y\in A(x):g(y)=a(x)\},\tag{7}$$

其中函数g由(2)式定义. 因为A是紧集,C为闭锥,所以$A(x)$为紧集,再由g为连续,则它在$A(x)$上达到最小值,随之得到,$\forall\ x\in A,H(x)\neq\varnothing$.

引理6 由$A(x)=(x-C)\bigcap A$定义的集值映射$A:A\to A$是上半连续的.

证明 反证. 设A在$x_0\in A$上不是上半连续的,则存在开集$O\supset A(x_0)$,以及网$\{x_\tau\}\subset A,x_\tau\to x_0$,使得

$$A(x_\tau)\not\subset O,$$

即对每个τ,$\exists\ y_\tau\in A(x_\tau)$,使得$y_\tau\notin O$.

因为$\{y_\tau\}\subset A$,以及A为紧集,所以可以假设$y_\tau\to y_0\in A$. 由于$y_\tau\in A(x_\tau)=(x_\tau-C)\bigcap A$,则$y_\tau\in x_\tau-C$,或$x_\tau-y_\tau\in C$,再注意到$C$为闭锥,取极限得$x_0-y_0\in C$,随之有$y_0\in(x_0-C)\bigcap A=A(x_0)\subset O$,即开集$O$是$y_0$的一个邻域,因此由$y_\tau\to y_0$知,存在$y_\tau\in O$,矛盾!

一般说来,集值映值$A(x)=(x-C)\bigcap A$,不是下半连续的. 为了保证它为下半连续的,我们再引出下面的定义.

定义 点$x\in A$称为A的F-点,如果$\forall$ 开集$O,x\in O\bigcap A+C$,则$\exists\ x$的邻域$W(x)$,使得

$$W\bigcap A\subset O\bigcap A+C.$$

A的所有F-点记作$F(A)$. 集合A称为F-集,如果A的每个点都是F-点,即$F(A)=A$.

引理7 (i) $E(A|C)\subset F(A)$; (ii) 设A为凸集,则$\mathrm{int}(A)\subset F(A)$.

证明 (i) 设$x\in E(A|C)$,则$A(x)=(x-C)\bigcap A=\{x\}$.

现设开集O,使$x\in O\bigcap A+C$,即$x=y+c$,其中$y\in O\bigcap A,c\in C$. 则$x-C=y\in O\bigcap A$,因此

$$y\in(x-C)\bigcap A=\{x\},$$

故$y=x$,随之$C=0$. 从而$y=x\in O\bigcap A$. 即然$x\in$开集O,则存在x的邻域W,使得$W\subset O$,于是

$$W\bigcap A\subset O\bigcap A\subset O\bigcap A+C.$$

因此x是F-点.

(ii) 设A为凸集,$x\in\mathrm{int}A$.

假设$x\in O\bigcap A+C$,其中O为开集. 则存在$c\in C$,使得$x-c\in O\bigcap A$. 因为$x\in\mathrm{int}A,x-c\in A$,所以

$$z_\lambda=\lambda(x-c)+(1-\lambda)x=x-\lambda c\in\mathrm{int}A,\ \forall\ \lambda\in[0,1).$$

此外,当$\lambda\to1$时,$z_\lambda\to(x-c)\in O$,故当λ充分接近1时,$z_\lambda\in O$. 于是对这些λ,有

$$z_\lambda=x-\lambda c\in O\bigcap\mathrm{int}A.$$

或 $x=z_\lambda+\lambda c\in O\cap \mathrm{int}A+C$，再注意开集 $O\cap\mathrm{int}A+C$ 包含了 x 的事实，存在 x 的邻域 W，使得

$$W\subset O\cap \mathrm{int}A+C.$$

从而 $W\cap A\subset W\subset O\cap\mathrm{int}A+C\subset O\cap A+C$，即 x 为 A 的 F－点.

引理 8 为了集值映射 $A:x\to A\cap(x-C)=A(x)$ 在点 $x_0\in A$ 上是下半连续的 $\Leftrightarrow x_0\in F(A)$.

证明 设 A 在 x_0 上为下半连续.要证 x_0 是一个 F－点.若不然，则存在开集 O，使得 $x_0\in O\cap A+C$，但是不存在 x_0 的邻域 W，使 $W\cap A\subset O\cap A+C$，即有网 $\{x_\tau\}\subset A$. 使得 $x_\tau\to x_0$，以及

$$x_\tau\notin O\cap A+C,\quad \forall\,\tau\in I.$$

等价地，$\forall\, c\in C.\ x_\tau-c\notin O\cap A$. 即

$$(x_\tau-C)\cap O\cap A=\varnothing,\quad \forall\,\tau\in I. \tag{8}$$

另一方面，由 $x_0\in O\cap A+C$ 得，存在 $y_0\in O\cap A$，使得 $x_0\in y_0+C$，或 $y_0\in(x_0-C)\cap A=A(x_0)$，并且 $y_0\in O$. 因为集值映射 A 在 x_0 上是下半连续的，所以存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得 $A(U(x_0))\cap O\neq\varnothing$. 再考虑到 $x_\tau\to x_0$，对充分大的 τ，有 $x_\tau\in U(x_0)$. 从而对这样的指标 τ，$A(x_\tau)\cap O\neq\varnothing$，或

$$A(x_\tau)\cap O=(x_\tau-C)\cap A\cap O\neq\varnothing,$$

这与(8)式矛盾！

反之，设 $x_0\in F(A)$，要证 $A(x)$ 在 x_0 上是下半连续的. 仍用反证法. 假设 A 在 x_0 上不是下半连续的，则存在 $y_0\in A(x_0)$ 以及 y_0 的开邻域 O，此外还存在 $\{x_\tau\}\subset A$，$x_\tau\to x_0$，使得

$$A(x_\tau)\cap O=\varnothing,\quad \forall\,\tau\in I. \tag{9}$$

因为 $y_0\in A(x_0)=(x_0-C)\cap A$，所以

$$x_0\in y_0+C\subset O\cap A+C.$$

由于 $x_0\in F(A)$，即 x_0 是 A 的 F－点，则存在 x_0 的邻域 W，使得 $W\cap A\subset O\cap A+C$，再考虑到 $x_\tau\to x_0$，当 τ 充分大时，$x_\tau\in W$，从而

$$x_\tau\in W\cap A\subset O\cap A+C,$$

即 $x_\tau=y_\tau+c_\tau$，$y_\tau\in O\cap A$，$c_\tau\in C$，或

$$y_\tau\in(x_\tau-C)\cap A=A(x_\tau),\quad 又\ y_\tau\in O.$$

从而 $y_\tau\in A(x_\tau)\cap O$. 这与(9)式矛盾！

引理 9 假设 A 是一个紧的 F－集，则由(6)式所定义的 $a(x)$ 是一个上半连续的单值函数.

证明 $\forall\, x_0\in A$ 以及 $\varepsilon>0$，需要证明存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得

$$a(x)\leqslant a(x_0)+\varepsilon,\quad \forall\, x\in U(x_0). \tag{10}$$

由(6)式 $a(x_0)$ 的定义，存在 $z_0\in A(x_0)$，使得

$$a(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}\geqslant g(z_0).$$

因为函数 g 在 z_0 上连续，所以存在 z_0 的开邻域 $U_1(z_0)$，使得

$$g(z_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant g(z)\leqslant g(z_0)+\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\, z\in U_1(z_0).$$

由此推得 $a(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}\geqslant g(z_0)\geqslant g(z)-\frac{\varepsilon}{2}$，或

$$g(z)\leqslant a(x_0)+\varepsilon,\quad \forall\, z\in U_1(z_0). \tag{11}$$

此外，由 $z_0\in A(x_0)$ 以及 A 在 x_0 上为下半连续的，则对 z_0 的开邻域 $U_1(z_0)$，存在 x_0 的邻域

$U(x_0)$，使

$$A(x) \cap U_1(z_0) \neq \varnothing, \quad \forall x \in U(x_0).$$

这样一来，$\forall x \in U(x_0)$，存在 $\bar{z} \in A(x) \cap U_1(z_0)$，应用不等式(11)，就可得到，$\forall x \in U(x_0)$，

$$a(x) = \min\{g(z); z \in A(x)\} \leqslant g(\bar{z}) \leqslant a(x_0) + \varepsilon.$$

到此不等式(10)得到证明.

引理 10 (i) $\forall x \in A$, $H(x) \subset E(A|C)$; (ii) $\forall x \in E(A|C)$, $x \in H(x)$; (iii) $\forall x \in A$, 值 $H(x)$是闭集.

证明 (i) 设 $x \in A, x' \in H(x)$，即

$$g(x') = a(x) = \min\{g(z); z \in A(x)\}.$$

如果 $x' \notin E(A|C)$，则存在 $y \in A$，使得 $y \in x' - C/\{0\}$，据引理 3，

$$g(y) < g(x') = a(x).$$

其次，因为 $x' \in H(x) \subset A(x) = (x-C) \cap A$，所以

$$y \in x' - C/\{0\} \subset (x - C) - C/\{0\} \subset x - C.$$

又 $y \in A$，则 $y \in (x-C) \cap A = A(x)$.

总之有，$y \in A(x)$，$g(y) < a(x)$，这与 $a(x)$是 g 在 $A(x)$上的最小值矛盾.

(ii) 设 $x \in E(A|C)$，即 $A(x) = (x-C) \cap A = \{x\}$，因此也有 $H(x) = \{x\}$.

(iii) 设 $x \in A$，证 $H(x)$是一个闭集. 为此设 $\{x_\tau\} \subset H(x)$，$x_\tau \to \bar{x}$. 依 $A(x) = (x-C) \cap A$ 为闭集，以及 $H(x) \subset A(x)$，可知 $\bar{x} \in A(x)$.

其次由于 $x_\tau \in H(x)$，即 $g(x_\tau) = a(x) = \min\{g(z); z \in A(x)\}$，则$\forall z \in A(x)$，有

$$g(x_\tau) \leqslant g(z).$$

注意到 g 在 $\bar{x}$ 上是连续的，以及 $x_\tau \to \bar{x}$，故取极限得

$$g(\bar{x}) \leqslant g(z), \forall z \in A(x),$$

从而 $g(\bar{x}) = \min\{g(z); z \in A(x)\} = a(x)$，即 $\bar{x} \in H(x)$.

引理 11 $H(x)$是一个由 A 到 $E(A|C)$上的上半连续集值映射.

证明 $\forall x \in A$，令

$$T(x) = \{y \in A; g(y) \leqslant a(x) = \min\{g(z); z \in A(x)\}\},$$

则有

$$H(x) = A(x) \cap T(x) = (A \cap T)(x).$$

由引理 6 知，$A(x)$是上半连续的，并且值 $A(x)$还是紧集，因此引用引理 5，为了证明交映射 H 的上半连续性，只需验证 T 是闭映射即可.

设网$\{(x_\tau, y_\tau)\} \subset \mathrm{Graf}(T)$，$(x_\tau, y_\tau) \to (x, y)$. 即 $y_\tau \in T(x_\tau)$，$x_\tau \to x$，$y_\tau \to y$. 在下要证 $y \in T(x)$.

因为 $y_\tau \in T(x_\tau) \subset A$，所以 $y \in A$. 再由 T 定义得

$$g(y_\tau) \leqslant a(x_\tau), \quad \forall \tau \in I.$$

根据引理 9，函数 a 是上半连续的，则取极限得

$$g(y) = \lim g(y_\tau) = \overline{\lim} g(y_\tau) \leqslant \overline{\lim} a(x_\tau) \leqslant a(x).$$

再由 T 的定义，即得 $y \in T(x)$.

综合上述结果，即可证明本文的第一个主要结果.

定理 2 设 X 是 Hausdorff 局部凸空间，C 是 X 中的满足尖条件的闭凸锥，其次再设 $A \subset$

X 是一个紧的 F－集，则 A 的有效点集 $E(A|C)$ 是非空的闭集.

证明 因为 A 是紧集，所以由有效点的普通存在定理知，$E(A|C)\neq\varnothing$.

其次，根据引理 10 和 11，集值映射 $H:A\to E(A|C)$ 满足定理 1 的所有条件，因此由定理 1 推得，$E(A|C)$ 是闭集.

附注 1 从定理 2 的条件看出，它没有涉及到任何凸性的假设，因此可以说，定理 2 是讨论非凸情况下的一种拓扑结构理论.

附注 2 定理 2 的逆命题不成立，即在 A 为紧集的条件下，从它的有效点集 $E(A|C)$ 为闭集条件，不能推出 A 为 F－集.

例子 设 $X=\boldsymbol{R}^2, C=\boldsymbol{R}^2_+$，

$$A=\{(x_1,0):-1\leqslant x_1\leqslant 0\}\cup\{(0,x_2):-1\leqslant x_2\leqslant 0\}.$$

显然，$E(A|C)=\{(-1,0),(0,-1)\}$ 是闭集，但是原点 $O\in A$ 不是 A 的 F－点，从而 A 不是 F－集.

四. 有效点集的连通性

从上一节的例子还可看出，A 不是 F－集，以及 $A(0)=(0-\boldsymbol{R}^2_+)\cap A$ 也不是凸集，又知有效点集 $E(A|C)=\{(-1,0),(0,-1)\}$ 不是连通集. 因此看来有效点集的连通性与 A 为 F－集以及每个 $A(x)=(x-C)\cap A$ 为凸集性质有关.

定理 3 在定理 2 的条件下，再设 $\forall\, x\in A, A(x)=(x-C)\cap A$ 为凸集以及 A 本身为连通集，则有效点集 $E(A|C)$ 是非空的连通闭集.

证明 由引理 10 得

$$E(A|C)=\bigcup\{H(x):x\in A\}. \tag{12}$$

由引理 11 得 H 是上半连续的集值映射. 再注意到所设条件，A 是连通集，以及每个 $H(x)$ 是凸集(不等式(3)推出)，从而连通的事实，应用有关连通性的普通定理即知，$E(A|C)$ 是连通集.

附注 3 定理 3 中的条件，$A(x)$ 为凸集不可减弱为连通集，或者弧连通集. 例如上一节中的例子，$A(0)=(0-\boldsymbol{R}^2_+)\cap A=A$ 虽然不是凸集，但是弧连通集，然而有效点集是不连通的.

参 考 文 献

[1] D. T. Luc, *Structure of the efficient point set*, Proc. Amer. Math. Soc., 95(3), 1985.

[2] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Spring—Verlag, 1989.

[3] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley—Interscience, New york, 1984.

[4] S. Helbig, J. Opt. Theory and Appl., 65:2, 1990, 257—270.

On the Closeness and Connectedness of the Set of Efficient Points

Fu Wantao
(Dept. of Math., Jiangxi Univ., Nanchang)

Abstract

Let A be a subset in a locally convex space X and C be a closed convex cone with cusp condition. Denote by $E(A \setminus C)$ the set of efficient points of the set A with respect to C. Suppose that A is a compact F-set not necessarily convex. We obtain some results on the closeness of the set of efficient points. Furthermore, we prove that under some adequate convex assumptions the set $S(A \setminus C)$ is connected.