第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

非线性双曲方程解的爆破问题*

杨家新　张耀明

(大连理工大学数学科学研究所，116024)

摘要　本文对两类非线性双曲方程的初值问题，研究了因子 $f(t)$ 对于解爆破的影响. 其中一类含 u 的一次项，对这一类方程的初值问题还研究了 u 的一次项系数对解爆破的影响.

§1　引　言

本文首先讨论下述初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - Au = f(t)F(u_t),\ x \in R^n, t > 0, & (1.1)\\ u(x,0) = h(x),\ u_t(x,0) = g(x), & (1.2)\end{cases}$$

其中 A 是一致椭圆型自共轭算子 $A = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x,t)$.

文献[1]中提出了防爆因子. [4]在二维空间中研究了 $A=\Delta$(拉普拉斯算子)，当因子 $f(t)=O(1)$ 时方程(1.1)、(1.2)解的爆破性，[5]在 R^n 中研究了 $A=\Delta$，当 $f(t)=O(1)$ 时方程(1.1)、(1.2)解的爆破性. 本文在 R^n 中研究了三种因子：(1) $f(t)=O(1)$，(2) $f(t)=(1+t)^m$，(3) $f(t)$ 为一般正实函数.

在文中第三部分考虑了问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - m(t)u = f(t)F(u_t,u), x \in \Omega, t > 0, & (1.3)\\ u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega t \geq 0, & (1.4)\\ u(x,0) = h(x),\ u_t(x,0) = g(x), & (1.5)\end{cases}$$

其中 $\Omega \subset R^n$，是 R^n 中一个有界开集，具有光滑的边界 $\partial\Omega$. 我们运用[3]中的思想，讨论了 $m(t)$，$f(t)$ 对(1.4)—(1.6)解爆破的影响.

§2　问题(1.1)—(1.2)解的爆破

这一节的主要结果是下述定理1.

定理1　若对问题(1.1)—(1.2)满足

(1)　$F(u_t) \geq a|u_t|^p$，p 为大于1的实数，$a>0$ 是常数.

(2)　$h(x)$，$g(x)$ 具有紧支集 $\{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$，且 $\int_{R^n} g(x)dx = c_0 > 0$.

则　(1)　若 $f(t)=O(1)$（或 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=c$，$0<c\leq\infty$），且当 $1\leq p\leq\frac{n+1}{n}$ 时，问题(1.1)—(1.2)的

1992年2月25日收到.

解爆破.

(2) 若 $f(t)=(1+t)^m$,当 $m\geqslant n(p-1)-1$ 时,问题(1.1)—(1.2)的解爆破.

(3) 若 $\forall\ p>1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{(1+t)^{n(p-1)-1}}=c$, $0<c\leqslant\infty$,问题(1.1)—(1.2)的解爆破.

为了证明定理 1,我们首先证明两个引理

引理 1 假设 $F(t)\in c^2[a,b]$,对 $t\in[a,b]$有

$$F(t)\geqslant c_0(1+t)^i \tag{2.1}$$

$$\ddot{F}(t)\geqslant c_1F(t)^p(1+t)^{-q}. \tag{2.2}$$

这里的 $c_0,c_1>0$,若 $p>1$ 则 $i\geqslant1$,$(p-1)i>q-2$,则 b 必定是有限的.

证明 因为$(p-1)i>q-2$ 和 $i\geqslant1$,则

$$ip-q>i-2\geqslant-1. \tag{2.3}$$

由(2.1)与(2.2)有 $\ddot{F}(t)\geqslant c(1+t)^{pi-q}$,$t\in[a,b)$. 然后对这个不等式在$[a,t]$上积分得

$$\dot{F}(t)-\dot{F}(a)\geqslant c\int_a^t(1+s)^{pi-q}ds. \tag{2.4}$$

由(2.3)$pi-q\geqslant-1$ 和(2.4)可知 b 是有限的. 否则当 t 充分大时 $\dot{F}(t)>0$. 因此我们假设存在一个 a_0 使 $a<a_0<b$,和 $\dot{F}(t)>0$,$t\in[a_0,b)$,对所有的 $t\in[a,b)$且由上述关于 p,q,i 的假设,存在一个 $\theta\in(0,1)$使

$$\frac{1}{p}<\theta<1-\frac{q-2}{pi}. \tag{2.5}$$

由(2.1)与(2.2)的插值有

$$\ddot{F}(t)\geqslant c(1+t)^{(1-\theta)pi-q}\cdot F(t)^{\theta p}. \tag{2.6}$$

设 $\alpha=\theta p$, $\beta=q-(1-\theta)pi$,由(2.5)知 $\alpha=\theta p>1$,$\beta<2$,不失一般性设 $\beta\geqslant0$. 由(2.4)我们把 $\dot{F}(t)$ 乘以(2.6)的两边并积分得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\dot{F}(t)^2-\dot{F}(a_0)^2|&\geqslant c\int_{a_0}^t(1+s)^{-\beta}F(s)^\alpha\dot{F}(s)ds\\&\geqslant c(1+t)^{-\beta}[F(t)^{1+\alpha}-F(a_0)^{1+\alpha}]\end{aligned} \tag{2.7}$$

选择(2.7)的常数足够小,使得 $\frac{1}{2}\dot{F}(a_0)^2\geqslant c(1+a_0)^{-\beta}F(a_0)^{1+\alpha}$. 从而由(2.7)得出

$$\dot{F}(t)\geqslant c(1+t)^{-\beta/2}F(t)^{(1+\alpha)/2} \tag{2.8}$$

其中 $t\geqslant a_1\geqslant a_0$,$a_1$ 是充分大的数,在$[a_0,t)$上积分不等式(2.8)得

$$F(a_0)^{(1-\alpha)/2}-F(t)^{(1-\alpha)/2}\geqslant c[(1+t)^{1-\frac{\beta}{2}}-(1+a_0)^{1-\frac{\beta}{2}}],$$

因为 $1-\frac{\beta}{2}>0$,所以 t 不可能任意大. 因而 b 是有限的.

引理 2 设 $F(t)\in c^2[a,b]$,$F(t)>0$,且对 $a\leqslant t\leqslant b$ 有 $\dot{F}(t)\leqslant c\frac{1}{(1+t)^\beta}F(t)^p$,其中 $0<\beta\leqslant1$,$p>1$,c 是常数($c>0$). 则 b 必然是有限的.

引理 2 的条件(不等式)与引理 1 证明中的(2.8)类似,故不难由(2.8)式后的推导证明引理 2.

定理 1 的证明 由条件(1)存在一个光滑的凸函数 $q(s)$和某个正常数 $\tilde{a}$,使得

$$F(u_t)\geqslant a|u_t|^p\geqslant q(u_t)\geqslant\tilde{a}|u_t|^p. \tag{2.9}$$

由初值 $h(x)$ 和 $g(x)$ 的假定知，解 $u(x,t)$ 有紧支集在锥 $\{(x,t)\,|\,t\geqslant 0,|x|\leqslant t+1\}$ 内，用 B_{1+t} 表示以 $(1+t)$ 为半径的球.

记 $w=\int_{R^n}u_t(x,t)dx$，由(2.9)与 Jessen 不等式有

$$\int_{R^n}F(u_t)dx\geqslant\int_{R^n}q(u_t)dx=\int_{B_{1+t}}q(u_t)dx\geqslant c(1+t)^n q\Big(\int_{B_{1+t}}u_t(1+t)^{-n}dx\Big)$$
$$=c(1+t)^n q((1+t)^{-n}w)\geqslant\bar{c}(1+t)^{-n(p-1)}|w|^p. \tag{2.10}$$

对方程(1.1)的两边在 R^n 上关于 x 积分，并利用(2.10)得

$$w_t-\int_{R^n}\Delta u dx\geqslant\int_{R^n}f(t)F(u_t)dx\geqslant\bar{c}f(t)(1+t)^{n(1-p)}|w|^p.$$

由散度定理知 $\int_{R^n}\Delta u dx=0$，故

$$w_t\geqslant\bar{c}f(t)(1+t)^{n(1-p)}|w|^p. \tag{2.11}$$

当(1) $f(t)=O(1)$ 或 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=c,0<c\leqslant\infty$ 和 $1<p\leqslant\frac{n+1}{n}$ 时，对于充分大的 t，由(2.11)得出

$$w_t\geqslant\bar{c}\,\frac{1}{t}|w|^p.$$

当(2) $f(t)=(1+t)^m,m-n(p-1)\geqslant-1$ 时，由(2.11)得出 $w_t\geqslant c(1+t)^{m-n(p-1)}|w|^p$.

当(3) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{(1+t)^{n(p-1)-1}}=c,0<c\leqslant\infty$，对 $\forall\ p>1$，对充分大的 t，$f(t)\geqslant\bar{c}(1+t)^{n(p-1)-1}$，$\bar{c}$ 是正常数. 则由(2.11)得出 $w_t\geqslant c\,\frac{1}{t}|w|^p$.

由引理 2 不难推出在 $f(t)$ 的三种情形下，问题(1.1)－(1.2)的解在有限时间爆破.

例 问题 $\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=u_t^2f(t),\ t\in R^+,x\in R^n,\\ u(x,0)=h(x),u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. 若 $f(t)=O(1)$，$n\geqslant 1$，对于"小初值"，该问题具有整体解([5])，而当 $f(t)=(1+t)^m$，当 $m\geqslant 5$，不论初值大小及 $p(p>1)$ 的大小，问题的解必定在有限时间内爆破.

§3 问题(1.3)－(1.5)解的爆破

设 $\Phi(x)$ 表示 $\Delta\Phi+\mu\Phi=0(x\in\Omega)$ 在迪里克莱条件(在 $\partial\Omega$ 上，$\Phi=0$)下的第一个特征函数，$\mu=\mu_1$ 是相应的第一个特征值. 由经典定理([2])我们可以假设在 Ω 内 $\Phi>0$.

定理 2 假设问题(1.3)－(1.5)中 $m(t)\geqslant\mu_1$，且 $f(t)=(1+t)^m$，m 是一实数， $F(u,u_t)\geqslant b|u|^p$，$b>0,p>1$.

若 $u(x,t)$ 是问题(1.4)－(1.6)在 $\bar{\Omega}\times[0,T]$ 中的经典解，则当满足条件

$$\int_\Omega\Phi(x)h(x)dx>0,\quad\int_\Omega\Phi(x)g(x)dx>0\quad,m>-p-1$$

时，问题(1.3)－(1.5)的解必在有限时间内爆破.

证明 不失一般性，我们假定 Φ 被正规化，即 $\int_\Omega\Phi(x)dx=1$. 设 $P(t)=\int_\Omega\Phi(x)u(x,t)dx$.

方程(1.4)的两边同乘以 Φ，然后在 Ω 上积分，由于 $u(x,t)\in c^2[\bar{\Omega}\times[0,T]]$，我们得到

$$\int_\Omega\Phi u_{tt}dx=\ddot{P}(t)\geqslant\int_\Omega\Phi\Delta u dx+\int_\Omega\Phi\cdot f(t)|u|^p dx+m(t)\cdot P(t). \tag{3.1}$$

由于 Φ 已正规化，故

$$\Phi \Delta u = \nabla(\Phi \Delta u) - \nabla(u \Delta \Phi) + u \Delta \Phi. \tag{3.2}$$

利用(3.2)式及 u,Φ 所满足的边界条件，得到

$$\int_\Omega \Phi \Delta u dx = \int_\Omega u \Delta \Phi dx = - \mu_1 \int_\Omega u \Phi dx = - \mu_1 P(t). \tag{3.3}$$

由 Jessen 不等式得

$$\int_\Omega \Phi |u|^p dx \geqslant \left| \int_\Omega \Phi u dx \right|^p = |P(t)|^p. \tag{3.4}$$

因为 $m(t)-\mu_1 \geqslant 0$ 及(3.2)－(3.4)，(3.1)就变成

$$\ddot{P}(t) \geqslant f(t)|P(t)|^p, \tag{3.5}$$

固而能推出 $\ddot{P}(t) \geqslant 0$，故 $\dot{P}(t)$ 是非减函数. 由于 $P(0) = \int_\Omega \Phi(x)h(x)dx > 0$，$\dot{P}(0) = \int_\Omega \Phi(x)g(x)dx > 0$，所以 $\dot{P}(t) \geqslant c$，c 为常数($c>0$). 因而 $P(t)$是严格单调增加函数.

当 $t \to \infty$时，$\dot{P}(t)$有下述两种可能性：(a) $\dot{P}(t) \to a$，a 是一个正常数；(b) $\dot{P}(t) \to \infty$，对于情形(a)，设 $\dot{P}(t) \to a$ $(t \to \infty)$，则 $P(t) \to at$. 而当 t 充分大时，由(3.5)有 $\ddot{P}(t) \geqslant ct^p$. 从而 $\dot{P}(t) \geqslant ct^{p+1}$ 与情形(a)矛盾，对于情形(b)，假设 $P(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$，那么对任意大的 $A>0$，当 t 充分大时

$$P(t) \geqslant At \tag{3.6}$$

利用(3.5)，(3.6)，同时利用引理 1 推出当 $m > -p-1$ 时问题(1.3)－(1.5)的解产生爆破.

参 考 文 献

[1] Chen Chingyi, *On the blow up and quenching problems for semilinear heat equations*, Report on the Symposium of $\mathscr{D}, \mathscr{D}_1$, China, 1982.

[2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1,2, New York, Interscience, 1966.

[3] R. T. Glassey, *Blow up theorem for nonlinear wave equations*, Math. Z., 132, 182－203, (1973)

[4] Jack Schaeffer, *Finite－time blow－up for $u_{tt}-\Delta u = H(u_r, u_t)$ in two space dimensions*, Comm. PDE., 11(5), 513－543, (1986).

[5] T. Kato, *Blow－up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure. Appl. Math, 33(1980), 501－505.

[6] M. A. Rammaha, *Finite－time blow－up for nonlinear equations in high dimensions*, Comm. PDE. 12,6(1987), 677－700.

[7] T. Sider, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Diff. Equa., 52(1984), 378－406.

Blow-up of Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations

Yang Jiaxin *Zhang Yaoming*

(Dalian Univ. of Tech.)

Abstract

In this paper, we consider the actions of factor $f(t)$ and coefficient $m(t)$ of lower term of $u(x,t)$ on blow-up of solutions for initial problems of nonlinear hyperbolic equations.