第14卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 1
1994年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1994

三角域上分片二次函数 Bernstein 多项式的退化性*

邬 弘 毅
（安徽工学院，合肥 230069）

摘　要　设 $S_2(T)$ 为三角域 T 的二阶剖分，本文给出在 $S_2(T)$ 下分片二次函数 $f(P)\in C^1(T)$ 的 Bernstein 多项式的退化性及递推公式. 这里的条件 $S_2(T)$ 及 $C^1(T)$ 类都是重要的. 我们举例说明更一般情况下分片二次函数 Bernstein 多项式的复杂性.

对于[0,1]区间上连续的分段线性函数，D. Freedman 和 E. Passow[1,2] 已证明其 Bernstein 多项式具有退化性. 利用常庚哲与的方法很容易将这一结论推广到三角域上. 本文考虑三角域上分片 Danis[3] 二次函数多项式 Bernstein 的退化问题.

给定三角域 $T=\triangle ABC$，与 T 同一平面上任一点 P 的重心座标为 $P=(u,v,w)$. 当 $n\geqslant 2$ 时节点 $P_{i,j,k}^{(n)}=\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)$，$i\geqslant 0,j\geqslant 0,k\geqslant 0,i+j+k=n$，将 T 分成 n^2 个子三角形 $T_1^{(n)},T_2^{(n)},\cdots,T_{n^2}^{(n)}$，$T$ 的这种分划称 n 阶剖分 $S_n(T)$. 在 T 上定义的函数 $f(P)=f(u,v,w)$ 对应的 n 次 Bernstein 多项式为

$$B_n(f;P)=\sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k}C_n^{i,j,k}u^iv^jw^k, \tag{1}$$

其中

$$f_{i,j,k}=f(P_{i,j,k}^{(n)}),$$

$$C_n^{i,j,k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{i!j!k!}, & i\geqslant 0,j\geqslant 0,k\geqslant 0,\\ 0, & i,j,k\text{ 中至少有一个小于零}.\end{cases}$$

利用升阶公式[3,P24]

$$B(f;P)=\sum_{i+j+k=n+1}\frac{1}{n+1}\left[if\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)+jf\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)+kf\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k-1}{n}\right)\right]. \tag{2}$$

经计算整理有

$$(n+1)B_{2n+2}(f;P)-(2n+1)B_{2n+1}(f;x)+nB_{2n}(f;P)=\sum_{i+j+k=2n+2}L[f;i,j,k]u^iv^jw^k]. \tag{3}$$

这里的线性算子 L 定义为

* 1991年9月13日收到.

$$
\begin{aligned}
L[f;i,j,k] = {} & (n+1)C_{2n+2}^{i,j,k} f(P_{i,j,k}^{(2n+2)}) - (2n+1)[C_{2n+1}^{i-1,j,k} f(P_{i-1,j,k}^{(2n+1)}) \\
& + C_{2n+1}^{i,j-1,k} f(P_{i,j-1,k}^{(2n+1)}) + C_{2n+1}^{i,j,k-1} f(P_{i,j,k-1}^{(2n+1)})] \\
& + n[C_{2n}^{i-2,j,k} f(P_{i-2,j,k}^{(2n)}) C_{2n}^{i,j-2,k} f(P_{i,j-2,k}^{(2n)}) + C_{2n}^{i,j,k-2} f(P_{i,j,k-2}^{(2n)}) \\
& + 2C_{2n}^{i-1,j-1,k} f(P_{i-1,j-1,k}^{(2n)}) + 2C_{2n}^{i-1,j,k-1} f(P_{i-1,j,k-1}^{(2n)}) \\
& + 2C_{2n}^{i,j-1,k-1} f(P_{i,j-1,k-1}^{(2n)})],
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中 $i+j+k=2n+2$.

可以验证

引理 对任何定义在 T 上的二次函数 $f(P)=au^2+bv^2+cw^2+duv+evw+euw+hnv$,恒有

$$
L[f;i,j,k] = 0, i \geqslant 0, j \geqslant 0, k \geqslant 0, i+j+k = 2n+2. \tag{5}
$$

本文的主要结果为:

定理 设 $f(P)$为在三角域 T 在剖分 $S_2(T)$下的分片二次函数,且有 $f(P)\in C^1(T)$. 则对一切 $n\geqslant 1$ 的整数,$f(P)$的 $2n+2$ 次 Bernstein 多项式 $B_{2n+2}(f;P)$退化为 u,v,w 的次数不超过 $2n+1$ 的多项式,且有递推式

$$
(n+1)B_{2n+2}(f;P) - (2n+1)B_{2n+1}(f;P) + nB_{2n}(f;P) = 0. \tag{6}
$$

证明 设 T 在 $S_2(T)$下的子三角形为 $T_a^{(2)}(a=1,2,3,4)$(图 1),$f(P)$在 $T_a^{(2)}$ 可表为

$$
\begin{aligned}
f(P) = {} & A_a(u-\frac{1}{2})^2 + B_a(v-\frac{1}{2})^2 + C_a(w-\frac{1}{2})^2 \\
& + D_a(u-\frac{1}{2})(v-\frac{1}{2}) + E_a(u-\frac{1}{2})(w-\frac{1}{2}) \\
& + H_a(v-\frac{1}{2})(w-\frac{1}{2}), P \in T_a^{(2)}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

根据 $P_{i,j,k}^{(2n+2)}$ 在子三角形 $T_a^{(2)}$ 中的不同位置,(3)右端求和可分为三部分(图 2)

(i) $P_{i,j,k}^{(2n+2)}$ 不在子三角形的交线 Q_1Q_2,Q_2Q_3 或 Q_3Q_1 上,即 i,j,k 全不等于 $n+1$. 这时 $L[f;i,j,k]$中与 $P_{i,j,k}^{(2n+2)}$(用"·"表示,如 M、R)相邻的诸点 $P_{i-1,j,k}^{(2n+1)},P_{i,j-1,k}^{(2n+1)},P_{i,j,k-1}^{(2n+1)}$(用"×"表示)以及 $P_{i-2,j,k}^{(2n)},\cdots,P_{i,j-1,k-1}^{(2n)}$(用"口"表示)都位于同一子三角形 $T_a^{(2)}$ 上,由引理可知这部分之和等于零.

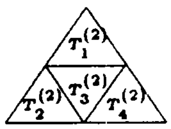

图1 T 的剖分$S_2(T)$

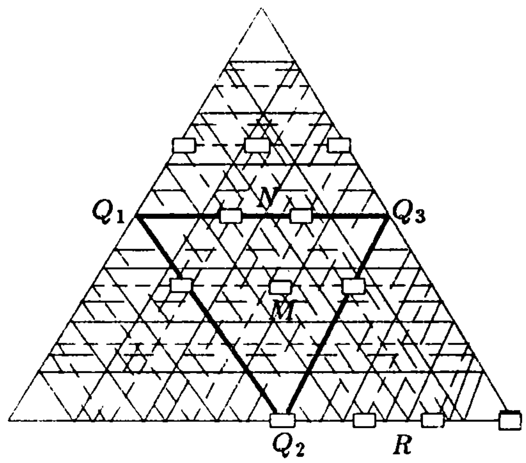

图2 在$S_2(T)$ 下$n=3$ 时算子L 中节点分布

(ii) $P_{i,j,k}^{(2n+2)}$ 属于交线 Q_1Q_2，Q_2Q_3 或 Q_3Q_1 的内点，即 $i=n+1$，$1\leqslant j\leqslant n$ 或 $j=n+1$，$1\leqslant k\leqslant n$ 或 $k=n+1$，$1\leqslant i\leqslant n$. 以 $i=n+1$，$1\leqslant j\leqslant n$ 为例，如图 2 中 N 点，这时 L 中与之相邻的诸点位于两个不同的子三角形 $T_1^{(2)}$ 与 $T_3^{(2)}$ 中. 由于 $f(P)\in C^1(T)$，故 $B_1=B_3$，$C_1=C_3$，$D_1=D_3$，$E_1=E_3$，$H_1=H_3$，只需考虑 $A_1\neq A_3$，则有

$$
\begin{aligned}
L[f;i,j,k] = {} & A_1\Big\{-\frac{1}{4(2n+1)}\big[C_{2n+1}^{n+1,j-1,k}+C_{2n+1}^{n+1,j,k-1}\big]+\frac{1}{4n}\big[C_{2n}^{n+1,j-2,k} \\
& +C_{2n}^{n+1,j,k-2}+2C_{2n}^{n+1,j-1,k-1}\big]\Big\}+A_3\Big[-\frac{1}{4(2n+1)}C_{2n+1}^{n,j,k}+\frac{1}{4n}C_{2n}^{n-1,j,k}\Big] \\
= {} & 0.
\end{aligned}
$$

因此这一部分之和亦为零.

(iii) 剩下三点 Q_1，Q_2 或 Q_3，以 $Q_1=P_{n+1,n+1,0}^{(2n+2)}$ 为例，则有 $A_2=A_3$，$B_1=B_3$，$C_1=C_2=C_3$，$D_1=D_2=D_3$，$E_1=E_2=E_3$，$H_1=H_2=H_3$，而 $A_1\neq A_3$，$B_2\neq B_3$，这时

$$
\begin{aligned}
L[f;n+1,n+1,0] = {} & (A_1+B_1)\left[-\frac{1}{4(2n+1)}C_{2n+1}^{n+1,n,0}+\frac{1}{4n}C_{2n}^{n+1,n-1,0}\right] \\
& +(A_2+B_2)\left[-\frac{1}{4(2n+1)}C_{2n+1}^{n,n+1,0}+\frac{1}{4n}C_{2n}^{n-1,n+1,0}\right]=0.
\end{aligned}
$$

这部分之和亦为零，综上所述有

$$
\sum_{i+j+k=2n+2} L[f;i,j,k]u^iv^jw^k=0.
$$

从而(6)成立，定理证毕.

为说明定理中的条件 $S_2(T)$ 及 $f(P)\in C^1(T)$ 的重要性，请看两个函数：

$$
f(P)=\begin{cases}2u^2-u, & 0\leqslant u\leqslant \dfrac{1}{2}, \\[2mm] -8u^2+10u-3, & \dfrac{1}{2}<u\leqslant 1,\end{cases}
$$

$$
g(P)=\begin{cases}3u^2-u, & 0\leqslant u\leqslant \dfrac{1}{3}, \\[2mm] -\dfrac{1}{3}(9u^2-9u+2), & \dfrac{1}{3}<u\leqslant \dfrac{2}{3}, \\[2mm] \dfrac{1}{3}(18u^2-27u+10), & \dfrac{2}{3}<u\leqslant 1.\end{cases}
$$

在 $S_2(T)$ 下 $f(P)\in C(T)$ 但 $f(P)\notin C^1(T)$，而在 $S_3(T)$ 下 $g(P)\in C^1(T)$，它们的 2—10 次 Bernstein 多项式都不退化[5]，由此可知一般情况下分片二次函数 Bernstein 多项式的复杂性.

作者对冯玉瑜先生的热情指教帮助谨表谢意.

参 考 文 献

[1] D. Freedman and E. Passow, *Degenerate Bernstein polynomials*, Journal of Approximation Theory, 39(1983), 89—92.

[2] E. Passow, *Deficient Bernstein polynomials*, Journal of Approximation Theory, 59(1989), 282—285.

[3] G. Z. Chang and P. J. Davis, *The Convexity of Bernstein polynomials over Triangles*, Journal of Approximation Theory, 40(1984), 11—28.

[4] W. Böhm, G. Farin and J. Kahmann, *A survey of curves and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design, 1(1984), 1—60.

[5] 邬弘毅，分段二次函数的 *Bernstein* 多项式的退化性及其递推公式，安徽工学院学报， 13:1(1993)，28—35.

The Deficency of Bernstein Polynomials for Piecewise Quadratic Functions over Triangles

Wu Hongyi

(Anhui Inst. of Tech., Hefei)

Abstract

Let $S_2(T)$ be the 2-subdivision of triangle domain T. When $f(P) \in C^1(T)$ is piecewise quadratic function in $S_2(T)$, we determine the deficency and recursive formula of Bernstein polynomials of $f(P)$. The complexities of Bernstein polynomials for piecewise quadratic functions in more general conditions are illustrated by some examples.