第14卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 1
1994年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1994

L^2 空间中的 Bernstein—Markov 不等式及其最佳常数(Ⅱ)*

闵国华
(南京理工大学应用数学系,南京 210014)

摘要　继[15],本文考虑了带不同权函数 $L^2[-1,1]$空间中的 Bernstein—Markov 不等式,给出了其最佳常数;最后还得到相应的反向 Bernstein—Markov 不等式.

1. 引言

我们知道,著名的 Bernstein—Markov 不等式在多项式带权逼近等研究方面起着十分重要的作用(参见[1—5]),正因为如此,关于 Bernstein—Markov 不等式的研究近来十分活跃[6—14].

P. Nevai 曾多次指出研究决定有关 Bernstein—Markov 不等式中的最佳常数是非常有意义的. 最近,作者[15]结合矩阵的范数,用一个完全不同于已有的研究方法,研究在带相同权函数 L^2 空间中的 Bernstein—Markov 不等式,导出了一些新的,并解决了相应的 Bernstein—Markov 不等式的最佳常数问题. 本文继[15],用一个不同于已有的研究方法,研究在带不同权函数的 L^2 空间中的 Bernstein—Markov 不等式,并决定相应的最佳常数. 从而部分地解决了 P. Nevai[1,4,6] 指出的关于确定 Bernstein—Markov 不等式的最佳常数问题. 此外,在一定条件下,我们还给出了相应的反向 Bernstein—Markov 不等式.

2. 结论

$w(x)=w^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\ (-1<\alpha,\beta<1)$ 为 Jacobi 权函数;$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 为相应的 Jacobi 正交多项式且规定 $J_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$,此时有[16]

$$\int_1^{-1} w(x)J_n^{(\alpha,\beta)}(x)J_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}\qquad(2.1)$$

其中 δ_{nm} 为 Kronecker 记号. $\Gamma(x)$为 Gamma 函数.

记 $\Pi_n(x)$为次数不超过 n 的代数多项式;Khalilova(见[4]),Nevai 及 Mate(见[6,7])曾用不同的方法得到下列 Berstein—Markov 不等式

---

* 1991年6月10日收到.

定理 A

$$\int_{1}^{-1}[\sqrt{1-x^2}\Pi_n'(x)]^2 w(x)dx \leqslant cn^2\int_{1}^{-1}\Pi_n^2(x)w(x)dx, \tag{2.2}$$

其中 c 为一正常数.

Nevai 曾多次问(见[1,4,6,7]或 MR. 80m:41009)最佳常数(即最小常数)c 为多少？我们在此不妨简称此问题为 Nevai 问题. 本文用不同于已有的研究方法,得到:

定理 1

$$\int_{1}^{-1}[\sqrt{1-x^2}\Pi_n'(x)]^2 w(x)dx \leqslant n(n+\alpha+\beta+1)\int_{1}^{-1}\Pi_n^2(x)w(x)dx \tag{2.3}$$

且不等式(2.3)是最佳的:即存在多项式 $\Pi_n(x)$ 使得(2.3)式等号成立.

这样解决了相应的 Nevai 问题. 在证明定理 1 之前,我们先引用一个重要的引理,即:

Abel 引理[17] 若对一切 $n=1,2,3,\cdots$ 有 $0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 及 $m\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k\leqslant M$,则有

$$b_1M\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_kb_k\leqslant b_nM.$$

定理 1 的证明: 由正交多项式的唯一性可知存在 $a_k\,(k=0,1,\cdots n)$ 使得

$$\Pi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kJ_k^{(\alpha,\beta)}(x);\ \Pi_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kJ_k^{(\alpha,\beta)'}(x).$$

但注意到[16] $J_n^{(\alpha,\beta)'}(x)=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)J_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$,从而由(2.1)可得

$$\int_{-1}^{1}\Pi_n^2(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^{n}a_k^2\int_{-1}^{1}[J_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2w(x)dx$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\sum_{k=0}^{n}a_k^2\left[\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{k!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}\right] \tag{2.4}$$

及

$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}\,\Pi_n'(x)]^2w(x)dx=\int_{-1}^{1}[\Pi_n'(x)]^2w^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}a_k^2(k+\alpha+\beta+1)^2\int_{-1}^{1}w^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)[J_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)]^2dx$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\left[(k+\alpha+\beta+1)^2\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(k-1)!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}\right].$$

又注意到 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$,从而进一步可得:

$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}\,\Pi_n'(x)]^2w(x)dx$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{k!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}[k(k+\alpha+\beta+1)].$$

现令 Abel 引理中的 $c_k=a_k^2\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{k!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$, $b_k=k(k+\alpha+\beta+1)\geqslant0$ 且 $0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n=n(n+\alpha+\beta+1)$ 从而由 Abel 引理及(2.4)可得

$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}\,\Pi_n'(x)]^2w(x)dx\leqslant n(n+\alpha+\beta+1)\int_{-1}^{1}\Pi_n^2(x)w(x)dx.$$

即得证(2.3)式.

现取 $\Pi_n(x)=J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$，则有

$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}\,J_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)]^2w(x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(n+\alpha+\beta+1)^2\frac{2^{\alpha+\beta+3}}{2n+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}$$

$$=n(n+\alpha+\beta+1)\int_{-1}^{1}[J_n^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)dx.$$

这说明不等式(2.3)是最佳的，且最佳常数即为 $\Pi_n(x)=J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 取得.

特别地，取 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$，我们有

推论 1 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,[\Pi_n'(x)]^2dx\leqslant n^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Pi_n^2(x)dx$，且此不等式是最佳的.

推论 2 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,[\Pi_n'(x)]^2dx\leqslant n(n+1)\int_{-1}^{1}\Pi_n^2(x)dx$，且此不等式是最佳的.

现设 $P_n(x)$ 为一次数不超过 n 且所有零点为位于 $[-1,1]$ 内的实数的多项式. 在最大范数意义下，Turan[18] 得到如下的反向 Bernstein—Markov 不等式 $\|P_n'\|_\infty\geqslant\frac{\sqrt{n}}{6}\|P_n\|_\infty$，其中 $\|f\|=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant1}|f(x)|$.

在 L^2 空间中，对此我们得到如下的反向 Bernstein—Markov 不等式：

定理 2 设 $P_n(x)$ 为上述的多项，则

$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}\,P_n'(x)]^2w(x)dx\leqslant\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\Pi_n^2(x)w(x)dx \tag{2.5}$$

证明 不妨设 $P_n(x)=a\prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k)$ 则有 $P_n'(x)=P_n(x)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$，从而

$$P_n'^2(x)-P_n(x)P_n''(x)=P_n^2(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}$$

上式两边同乘 $(1-x^2)$ 得到

$$2(1-x^2)P_n'^2(x)-\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n(x)P_n'(x)]=P_n^2(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x^2)+2x(x-x_k)}{(x-x_k)^2}$$

即可得

$$2(1-x^2)P_n'^2(x)-nP_n^2(x)-\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n(x)P_n'(x)]=P_n^2(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x_k^2}{(x-x_k)^2}\geqslant0$$

从而两边从 -1 到 1 作定积分进一步可得(2.5). 由(2.5)可推知：对于 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$，有

推论 3 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,P_n'(x)dx\geqslant\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P_n^2(x)dx.$

对于 $\alpha=\beta=0$ 有

推论 4 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_n'(x)dx\geqslant\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$，且此不等式是最佳的.

对于上述不等式的最佳性，取 $P_n(x)=(1+x)^n$ 就可说明此.

参 考 文 献

[1] P. Nevai., J. Approx. Th., 48(1986), 3—167.
[2] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, J. Approx. Th., 49(1987), 149—169.
[3] P. Nevai, V. Totik, Constr. Approx., 2(1986), 113—127.
[4] P. Nevai, *In "Approximation Theory* Ⅱ" (*G. G. Lorentz etc Eds.*), 163—201, Academic Press, New York, 1976.
[5] S. S. Bonan, *Weighted mean convergence of Lagrange interpolation*, Ph. D. dissertation, Ohio State University, Columbus, 1982.
[6] A. Mate, P. Nevai, Ann. Math., 111(1980), 145—154.
[7] P. Nevai, J. Approx. Th., 27(1979), 239—243.
[8] G. Freud, *In "Approximation Theory* Ⅱ" (*G. G. Lorentz etc Eds.*), 369—378, Academic Press, New York, 1976.
[9] G. Freud, Soviet Math. Dock., 12(1971), 570—573.
[10] T. Erelyi, J. Approx. Th., 58(1989), 213—231.
[11] R. A. Zalik, J. Approx. Th., 41(1984), 39—50.
[12] R. A. Zalik, J. Approx. Th., 37(1983), 137—146.
[13] H. H. Mhaskar, E. B. Saff, Trans. Amer. Math. Soc., 285(1984), 203—234.
[14] D. S. Lubinsky, J. Approx. Th., 60(1990), 188—230.
[15] 闵国华，L^2空间中的Bernstein—Markov不等式及其最佳常数(Ⅰ)，数学进展，(已被决定录用，待发表).
[16] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, AMS Coll. Publ., New York, 1978.
[17] 徐利治，王兴华，数学分析的例题与选讲，高等教育出版社，1983.
[18] P. Turán, Compositio Math., 7(1939), 89—95.

Bernstein-Markov Inequality in Different Weighted-L^2 Spaces and its Best Possible Constant (II)

Min Guohua

(Dept. of Appl. M th., N njing University of Technology)

Abstract

The Bernstein-Markov inequality in different weighted-L^2 spaces and its best possible constant are considered. A converse Bernstein-Markov is given.