第14卷第1期
1994年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 1
Feb. 1994

非线性 Volterra 积分方程解强收敛和弱收敛的充要条件*

游兆永　　蒋耀林
(西安交通大学应用数学中心,710049)

摘要　本文研究 Banach 空间中具完全正核的非线性 Volterra 积分方程解强收敛和弱收敛的充分必要条件.这里的定理推广了众多该方向的结果,例如[5,9—10]等.

一、引论及预备知识

让 A 是实 Banach 空间中 m—增生算子,记 $D(A)$、$R(A)$ 和 $N(A)$ 分别为其定义域、值域和核.本文讨论下列非线性 Volterra 积方程

$$H(t) \in u(t) + b * Au(t), \quad t \in R^+ = [0, +\infty) \tag{V}$$

解的收敛性,这里 $b: R^+ \to R$, $H: R^+ \to X$ 是给定的,$*$ 表示卷积 $b * g(t) = \int_0^t b(t-s)g(s)ds$.方程(V)的理论可用于具有记忆的材料中热流(heat flow in a material with memory)问题的研究,该方程解存在唯一性的研究参见[4].我们的兴趣在于研究方程(V)解的收敛性.关于方程(V)解收敛的充分条件已有诸多研究,代表性结果参见[1,3,5—7,9—10].本文目的是在 A 满足条件(J)下获得方程(V)解强收敛和弱收敛于 $N(A)$ 中元素的充要条件,从该角度处理方程(V)解收敛性的方法是新的.这里的定理推广了众多该方向的结果,例如[5,9—10]等.

下列条件是本文的基本假设:

$$\begin{gathered} b \in AC_{\mathrm{Loc}}(R^+;R), b(0)=1, b' \in BV_{\mathrm{Loc}}(R^+;R), \\ H \in W^{1,1}_{\mathrm{Loc}}(R^+;X), H(0) = x \in \overline{D(A)}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

在此假设下,根据[4],方程(V)的强解与下列发展型方程

$$\left.\begin{aligned} m(t) + k(t)x \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + G(u)(t), m(t) + k(t)x, t \in R^+ \\ u(0) = x \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

强解相一致,这里 $G(u)(t) = k(0)u(t) + \int_0^t u(t-s)dk(s)$, $m(t) = H'(t) + k * H'(t)$, $k \in BV_{\mathrm{Loc}}(R^+;R)$ 满足

$$b + k * b = 1. \tag{1.2}$$

方程(V)和(E)强解的含义是 $W^{1,1}_{\mathrm{Loc}}(R^+;X) \cap C(R^+;\overline{D(A)})$ 中一函数对几乎处处的 $t \in R^+$ 分别满足方程(V)和(E).称一个函数 $u \in C(R^+;\overline{D(A)})$ 是方程(V)的广义解,如果对任何 $T>0$,当 $\lambda \to 0_+$ 时 u_λ 依 $C([0,T];X)$ 强拓扑收敛于 u,这里 u_λ 是(V)的近似方程(V)$_\lambda$(在(V)中用 A 的

* 1991年12月19日收到,93年3月6日收到修改稿.

Yosida 近似 A_λ 代替 A)的强解. 在条件(1.1)下,[4]证明了方程(V)有唯一的广义解. 如果方程(V)的强解存在,则这个广义解便是方程(V)的强解. 特别地,当 X 是自反 Banach 空间时,如果 $x\in D(A)$ 和 $H'\in BV_{\mathrm{Loc}}(R^+;X)$,则方程(V)的强解存在. 称 b 是完全正核(complete positive kernel),如果存在一个满足(1.2)的非负、非增的有界函数 $k:R^+\to R$. 此时,对 $t\in R^+$,$0<b(t)\leqslant b(0)$ 且极限 $\lim\limits_{t\to\infty}b(t)=b(\infty)$ 存在.

让 X^* 是 X 的对偶空间,$J:X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映象,$N_0(A)$ 是 $N(A)$ 的一个给定闭凸子集. 记 P_0 和 P 分别是 X 到 $N_0(A)$ 和 $N(A)$ 上的最近点投影算子. 本文如不特别说明,均假设 X 是强平滑的严格凸自反 Banach 空间. 这样 m—增生算子 A 的零点集 $N(A)$ 是 X 中的闭凸集(参见[9]),从而 $N_0(A)$ 和 $N(A)$ 均是 X 中 Chebyshev 集. 称平滑空间中零点集 $N(A)$ 非空的 m—增生算子 A 是满足条件(J)的,如果条件"$\langle y,J(x-P_0x)\rangle=0$"蕴含 $x\in N(A)$,这里 $y\in Ax$. 满足条件(J)的算子是十分广泛且重要的(参见[11]),例如文献[5,9—10]等中研究的算子均满足我们这里的条件.

二、主要结果

下面定理证明中需用到[1]中的一个结论:

引理 1[1] 让 $k:R^+\to R$ 是非负、非增函数. 设 $f\in L^1(R^+;R)$、$u\in W^{1,1}_{\mathrm{Loc}}(R^+;R^+)$ 对几乎处处 t 满足 $f(t)\geqslant\frac{d}{dt}(u+k*u)(t)$,则 u 是有界的且极限 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)$ 存在.

在定理 1 和定理 2 中,我们设 $k\in L^1(R^+;R)$.

定理 1 设 $A:D(A)\subset X\to 2^X$ 是满足条件(J)的 m—增生算子,并且 $N(A)$ 是有界紧的. 如果 $x\in D(A)$、$m\in C^1(R^+;X)\cap W^{1,1}(R^+;X)$,则(V)的强解 $u(t)$ 强收敛于 $x^*\in N(A)$ $(t\to\infty)$ 的充要条件是:存在严格增函数 $\varphi:R^+\to R^+$,$\varphi(0)=0$,使

$$\langle w(t),J(u(t)-P_0u(t))\rangle\geqslant\varphi(\|u(t)-Pu(t)\|)\|w(t)\|,\ \text{a.e.},t>0,\tag{2.1}$$

这里 $w(t)\in Au(t)$、$u(t)+b*w(t)=H(t)$, a.e., $t>0$.

证明 先证明在定理条件下,(V)的强解 $u(t)$ 存在并且 u、$w\in L^\infty(R^+;X)$. 在 $m=H^1+k*H^1$ 两边作用 $b*$,注意到(1.2),得 $H^1\in BV_{\mathrm{Loc}}(R^+;X)$,这样 $u(t)$ 是(V)的强解. 对 $p\in N(A)$,由[5]知极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)-p\|$ 存在,即 $u\in L^\infty(R^+;X)$. 现在说明 $w\in L^\infty(R^+;X)$. 让 $h>0$,$p(t)=\|u(t+h)-u(t)\|$,$u_h(t)=u(t+h)$,注意到(E)和 $u_h(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&m(t+h)+k(t+h)x+\left(\frac{d}{dt}(k*u_h)(t)-\frac{d}{dt}(k*u)(t+h)\right)\\&\in\frac{d}{dt}u_h(t)+Au_h(t)+\frac{d}{dt}(k*u_h)(t),\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt}(p(t)+k*p(t))\leqslant\|m(t+h)-m(t)\|+(\|x\|+\|u\|_\infty)(k(t)-k(t+h)).$$

上式两边同除以 h,并令 $h\to0+$,得

$$\frac{d}{dt}(\|u'(t)\|+k*\|u'\|(t))\leqslant\|m'(t)\|-(\|x\|+\|u\|_\infty)k'(t),\ \text{a.e.},t>0.$$

由引理 1 知，$\|u'(t)\|$ 有界且极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\|u'(t)\|$ 存在. 再注意到(E)和 $m\in L^\infty(R^+;X)$，有 $w\in L^\infty(R^+;X)$. 同时，我们也提醒在定理条件下，$N(A)$ 有界紧蕴含算子 P_0 和 P 是连续的.

必要性 令 $M=\sup\limits_{t\in R^+}\{\|u(t)-Pu(t)\|\,|u(t)\in D(A)\}$，$N=\sup\limits_{t\in R^+}\{\|w(t)\|\,|u(t)\in D(A)\}$. 对 $s\in(0,M)$，令 $C_s=\{t\in R^+\,|\,\|u(t)-Pu(t)\|\geqslant s, u(t)\in D(A)\}$ 和 $f(s)=\inf\{\langle w(t),J(u(t)-P_0u(t))\rangle/N\,|\,t\in C_s\}$. 现证 $\forall\ s\in(0,M)$，$f(s)>0$. 否则，如存在 $s_0\in(0,M)$ 使 $f(s_0)=0$，则有 $\{t_i\}\subset C_s$ 使

$$\|u(t_i)-Pu(t_i)\|\geqslant s_0>0,\ u(t_i)\in D(A), \tag{2.2}$$

$$\langle w(t_i),J(u(t_i)-P_0u(t_i))\rangle\to 0(i\to\infty). \tag{2.3}$$

我们区分两种情况：

情况Ⅰ $\{t_i\}$ 包含一无穷子列(不妨仍记为 $\{t_i\}$)发散到无穷. 这时由 $u(t)\to x^*(t\to\infty)$ 和 P 的连续性，从(2.2)推知 $u(t_i)$ 必是有限循环的，即有 $\{t_{i_j}\}\subset\{t_i\}$ 和 $t'\in\{t_i\}$ 使得 $u(t_{i_j})=u(t')$，$\forall\ j=1,2,\cdots$. 也就是 $\langle w(t'),J(u(t')-P_0u(t'))\rangle=0$，由于 A 满足条件(J)，则 $u(t')\in N(A)$，此与(2.2)矛盾.

情况Ⅱ $\{t_i\}$ 含于一有界区间，例如 $[0,T]$. 此时，不失一般性可设 $t_i\to t'(i\to\infty)$. 由 X 的强平滑性和定理的假设，J 是强－强连续的和 A 是次闭的，再考虑到 $u(t)$ 和 P_0 也是连续的，于是从(2.3)得 $\langle w(t'),J(u(t')-P_0u(t'))\rangle=0$，即 $u(t')\in N(A)$，此与(2.2)矛盾.

现定义 $f(0)=0$，$f(s)=\sup\{f(t)\,|\,0<t<M\}$，$\forall\ s\geqslant M$，令 $\varphi(s)=\dfrac{sf(s)}{1+s}$，$\forall\ s\in R^+$，则易知 φ 是严格单调增且满足(2.1)式的.

充分性 记 $j_0(t)=J(u(t)-P_0u(t))$，由于 $N_0(A)$ 是 X 中的闭凸集，对几乎处处 t，我们有(参见[2,10])，$\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u(t)-P_0u(t)\|^2=\langle u'(t),j_0(t)\rangle$. 考虑到(E)和(2.1)，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)-P_0u(t)\|^2\leqslant&-\varphi(\|u(t)-Pu(t)\|)\|w(t)\|-\langle\frac{d}{dt}(k*u)(t),j_0(t)\rangle\\&+(\|m(t)\|+k(t)\|x\|)\|u(t)-P_0u(t)\|\end{aligned} \tag{2.4}$$

由于 $\langle\dfrac{d}{dt}(k*u)(t),j_0(t)\rangle\geqslant k(0)\|u(t)-P_0u(t)\|^2+\langle(u-P_0u)*k'(t),j_0(t)\rangle+k(t)\langle P_0u(t),j_0(t)\rangle$ 和 $\langle(u-P_0u)*k'(t),j_0(t)\rangle\geqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}k*\|u-P_0u\|^2(t)+\dfrac{1}{2}k(t)\|u(t)-P_0u(t)\|^2-k(0)\|u(t)-P_0u(t)\|^2$，则(2.4)可写成

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|u(t)-P_0u(t)\|^2+k*\frac{1}{2}\|u-P_0u\|^2(t)\Big]\leqslant&-\varphi(\|u(t)-Pu(t)\|)\|w(t)\|\\&+(\|m(t)\|+k(t)\|x\|+k(t)\|P_0u(t)\|)\|u(t)-P_0u(t)\|.\end{aligned} \tag{2.5}$$

即，存在 $q\in L^1(R^+;R)$ 使

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)-P_0(t)\|^2+k*\frac{1}{2}\|u-P_0u\|^2(t)+\int_0^t q(s)ds\\&\leqslant-\varphi(\|u(t)-Pu(t)\|)\|w(t)\|\end{aligned} \tag{2.6}$$

这样，据引理 1，我们得极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2}\|u(t)-P_0u(t)\|^2$ 存在. 另一方面，对(V)的任一广义解 $u(t)$，在定理条件下，只要 $m\in L^1(R^+;X)$，则极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)-Pu(t)\|=r$ 存在(参见[5]). 如果 $r=0$，

$N(A)$的有界紧和对 $p\in N(A)$极限$\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)-p\|$存在,推得 $u(t)\to x^*\in N(A)(t\to\infty)$;如果 $r\neq 0$,我们有正数 $T(r)$使 $\|u(t)-Pu(t)\|\geqslant\frac{r}{2},\forall t\geqslant T(r)$. 这样,利用(2.6)和$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2}\|u(t)-P_0u(t)\|^2$存在,得 $w\in L^1(R^+;X)$. 由于 $H(t)=b*m(t)+x$,再注意到 $m\in L^1(R^+;X)$和$\lim\limits_{t\to\infty}b(t)$存在,得$\lim\limits_{t\to\infty}H(t)$存在. 由于 $u(t)=H(t)-b*w(t)$,知$\lim\limits_{t\to\infty}u(t)$存在. 这个极限是 A 的零点(参见[6]),也就是 $u(t)\to x^*\in N(A)(t\to\infty)$. 证毕.

注 1 如果条件"对任何 $x\in D(A)$和 $m\in C^1(R^+;X)\bigcap W^{1,1}(R^+;X)$,相应(V)解均满足(2.1)"成立,则当 $x\in\overline{D(A)}$和 $m\in L^1(R^+;X)$时,(V)的广义解也强收敛于 $N(A)$中一个元素(参见[10]).

注 2 如果 X 还是一致凸 Banach 空间(此时 P_0、P 仍然是连续的),则条件"$N(A)$是有界紧的"可由条件"$\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t+h)-u(t)\|=0,\forall h>0$"代替. 事实上,可以证明当 $t\to\infty$时,$Pu(t)$强收敛于$\{u(t)\}$关于 $N(A)$的渐近中心(参见[7]).

注 3 如果 X 还是一致凸的并且 $\mathrm{int}(N(A))\neq\varnothing$(参见[2,8]),取 $N_0(A)=\{x_0\}$,这里 $x_0\in\mathrm{int}(N(A))$,则可以证明(参见[2])存在正数 r 使

$$\langle w(t),J(u(t)-x_0)\rangle\geqslant r\|w(t)\|,\ \text{a.e.},t>0 \tag{2.7}$$

因此定理 1 和注 1 说明方程(V)的任一广义解强收敛于 $x^*\in N(A)$(此时不必假设 $N(A)$是有界紧的). 如果 A 满足收敛性条件(参见[2,8]),显然此时条件(2.1)成立. 这样定理 1 和注 1 的结论包含了[5,10]中的结果.

下面定理中我们还假设 X 是一致凸的(从而 X 是严格凸和自反的).

定理 2 让 X 是一致凸的强平滑空间,设 $A:D(A)\subset X\to 2^X$ 是满足条件(J)的 m—增生算子,并且 $N(A)$是有界紧的. 如果 $x\in D(A)$,$m\in C^1(R^+;X)\bigcap W^{1,1}(R^+;X)$,则(V)的强解 $u(t)$弱收敛于$\{u(t)\}$关于 $N(A)$的渐近中心 $z\in N(A)$的充要条件是:对 $f\in X^*$,存在严格增函数 $\varphi_f:R^+\to R^+$,$\varphi_f(0)=0$,使

$$\langle w(t),J(u(t)-P_0u(t))\rangle\geqslant\varphi_f(|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|)|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|, \tag{2.8}$$

这里 $w(t)\in Au(t)$,$u(t)+b*w(t)=H(t)$,a.e.,$t>0$.

证明 首先与定理 1 的证明相同,(V)的强解 $u(t)$存在并且 $u,w\in L^\infty(R^+;X)$. 考虑到 X 是一致凸的,$\{u(t)\}$有唯一的渐近中心 $z\in N(A)$,于是$\lim\limits_{t\to\infty}Pu(t)=z$. 让

$$M=\sup\{|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|\mid t\in R^+,u(t)\in D(A)\}(\text{不妨设 } M\neq 0).$$

对于 $s\in(0,M)$,令 $C_s=\{t\in R^+\mid|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|\geqslant s,u(t)\in D(A)\}$和 $f(s)=\inf\{\langle w(t),J(u(t)-P_0u(t))\rangle/M\mid t\in C_s\}$. 类似于定理 1 的证明,必要性得证.

充分性 类似于定理 1 证明中的(2.6),我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)-P_0u(t)\|^2+k*\frac{1}{2}\|u-P_0u(t)\|+\int_0^t q(s)ds\Big)\\&\leqslant-\varphi_f(|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|)|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|,\end{aligned} \tag{2.9}$$

这里 $q\in L^1(R^+;R)$. 上式蕴含极限$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2}\|u(t)-P_0u(t)\|^2$存在,这样由(2.9)也推出

$$\int_0^{+\infty}\varphi_f(|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|)|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|dt<+\infty. \tag{2.10}$$

从而$\liminf_{t\to\infty}|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|=0$. 由于$\lim_{t\to\infty}Pu(t)=z$,所以有$\liminf_{t\to\infty}|\langle u(t)-z,f\rangle|=0$. 由此,为完成证明,我们只需再证明极限$\lim_{t\to\infty}|\langle u(t)-z,f\rangle|$存在. 对任何$\delta>0$,记$Q(\delta)=\{t\in R^+|\,|\langle u(t)-z,f\rangle|>\delta\}$和$\bar{Q}(\delta)=\{t\in R^+|\,|\langle u(t)-Pu(t),f\rangle|>\delta\}$. 对这样的$\delta$,存在正数$T(\delta)$,当$t>T(\delta)$时,有$|\langle Pu(t)-z,f\rangle|\leqslant\delta/2$,于是

$$Q(\delta)\cap\{t\in R^+|t>T(\delta)\}\subset\bar{Q}(\delta/2). \tag{2.11}$$

另一方面,由(2.10)得$\int_{\bar{Q}(\delta/2)}\frac{\delta}{2}\varphi_f(\frac{\delta}{2})dt<+\infty$,即$m(\bar{Q}(\delta/2))<+\infty$,这样从(2.11)就得到$m(Q(\delta))<+\infty$. 因为$Q(\delta)$是开集,由开集构造定理,可写$Q(\delta)=\bigcup_{i=0}^{\infty}I_i$,这里$I_i$是构成区间. 考虑到这样的$\{I_i\}$至多可列个和$m(Q(\delta))<+\infty$,存在包含$Q(\delta)\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,这里开区间$(\alpha_n,\beta_n)$,$n=0,1,2,\cdots$,互不相交,$\beta_{n-1}\leqslant\alpha_n$且$m(\bigcup_{n=0}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n))<m(Q(\delta))+1$. 以下,记$a(t)=|\langle u(t)-z,f\rangle|$. 注意到(V)的任一广义解$u(t)$均满足(参见[6])

$$\lim_{s\to 0_+}\{\sup_{t\in R^+}\|u(t+s)-u(t)\|\}=0. \tag{2.12}$$

这样对任意$\varepsilon>0$,由于$\sum_{n=0}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)<+\infty$(这里$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$是上面相应于$Q(\varepsilon/8)$的开集),(2.12)蕴含存在正整数$N_0=N_0(\varepsilon)$使得当$n\geqslant N_0$时,如果$t,s\in(\alpha_n,\beta_n)$,则$\|u(t)-u(s)\|\leqslant\varepsilon/(8\|f\|)$. 由此,当$t$、$s>\alpha_{N_0}$时,仿照[11]中的证法,我们有$|a(t)-a(s)|<\varepsilon$,从而$\{a(t)\}$是Cauchy网,这就完成了证明.

注 4 类似注 1,若条件"对任何$x\in D(A)$和$m\in C^1(R^+;X)\cap W^{1,1}(R^+;X)$,相应(V)解均满足(2.8)"成立,则当$x\in\overline{D(A)}$和$m\in L^1(R^+;X)$时(V)的广义解也弱收敛于$\{u(t)\}$关于$N(A)$的渐近中心. 事实上,此时存在$\{m_n\}\subset C^1(R^+;X)\cap W^{1,1}(R^+;X)$(在$L^1(R^1;X)$空间稠)和$\{x_n\}\subset D(A)$,使得$m_n\xrightarrow{L^1(R^+,X)}m$和$x_n\xrightarrow{X}x$ $(n\to\infty)$. 让$\{u_n(t)\}$是相应(V)的强解,由定理 2 知$u_n(t)\xrightarrow{w}v_n\in N(A)$ $(t\to\infty)$,这里v_n是$\{u_n(t)\}$关于$N(A)$的渐近中心. 我们现在需要下列引理:

引理 2[10] 让u_1和u_2是方程(V)满足$H=H_1$和$H=H_2$的解,如果X是自反的,则对所有$t\geqslant0$有

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leqslant\|u_1(0)-u_2(0)\|+\int_0^t\|m_1(r)-m_2(r)+k(r)(u_1(0)-u_2(0))\|dr.$$

这样由引理 2 和$N(A)$是闭凸集,可证$v_n\xrightarrow{w}v\in N(A)$ $(n\to\infty)$. 再用引理 2,得$u(t)\xrightarrow{w}v$ $(t\to\infty)$,这里v是$\{u(t)\}$关于$N(A)$的渐近中心,这是因为P是连续的和对$f\in X^*$,有

$$\begin{aligned}|\langle Pu(t)-v,f\rangle|\leqslant&|\langle Pu(t)-Pu_n(t),f\rangle|+|\langle Pu_n(t)-u_n(t),f\rangle|\\&+|\langle u_n(t)-u(t),f\rangle|+\langle u(t)-v,f\rangle|.\end{aligned}$$

注 5 如果$b\equiv1$,$H(t)=u_0$,则方程(V)成为

$$0\in\frac{du}{dt}+Au,\ 0\leqslant t<+\infty \tag{2.13}$$

发展方程(2.13)解的收敛性是近年非线性发展方程研究领域的一个重点(参见[11]),这里的结论也可视作是增生型发展方程解收敛性的相应结论的推广.

参 考 文 献

[1] J. B. Baillon and Ph. Clément, *Ergodic theorems for nonlinear Volterra equations in Hilbert space*, Nonlinear Anal. 5 (1981), 789—801.

[2] R. E. Bruck and S. Reich, *A general convergence principle in nonlinear functional analysis*, Nonlinear Anal. 4 (1980), 939—950.

[3] Ph. Clément and J. A. Nohel, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels*, SIAM J. Math. Anal. 12(1981), 514—535.

[4] M. G. Crandall and J. A. Nohel, *An abstract functional differential equation and a related nonlinear Volterra equation*, Israel J. Math. 29(1978), 31—328.

[5] D. S. Hulbert and S. Reich, *Asymptotic behavior of solutions to nonlinear Volterra integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 104(1984), 155—172.

[6] N. Kato, K. Kobayasi and I. Miyadera, *On the asymptotic behavior of solutions of evolution equations associated with nonlinear Volterra equations*, Nonlinear Anal. 9(1985), 419—430.

[7] K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of solutions to nonlinear Volterra equations*, in "Nonlinear Analysis", pp. 223—230, North-Holland Publishing Company, 1985.

[8] O. Nevanlinna and S. Reich, *Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces*, Israel J. Math. 32(1979), 44—58.

[9] S. Reich, *Nonlinear semigroups, holomorphic mappings and integral equations*, Proc. Sympos. Pure Math. 45 (1986), 307—324.

[10] S. Reich, *Admissible pairs and integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 121(1987), 79—90.

[11] 蒋耀林，关于增生型非线性发展方程解的渐近性态的研究，西安交通大学博士论文，1992.

A Necessary and Sufficient Condition for Strong and Weak Convergence of Solutions of Nonlinear Volterra Integral Equations in Banach Spaces

You Zaoyong *Jiang Yaolin*

(Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an)

Abstract

A necessary and sufficient condition is presented which ensures the strong convergence and the weak convergence of solutions of nonlinear Volterra integral equations. The conclusion generalizes results proved in [5,9, 10, etc.].