关于"广义 Liénard 方程的周期解"一文的注记*

庾建设　　黄立宏
(湖南大学应用数学系，长沙 410082)

摘要　本文研究广义 Liénard 方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$ 的周期解的存在性，所得结果不仅较大地改进了文[1]的定理而且还指出了文[1]中的错误.

1. 引　言

考虑二阶非线性微分方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0, \tag{1}$$

它的等价微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v,\\ \dfrac{dv}{dt}=-f(x,v)v-g(x).\end{cases} \tag{2}$$

最近，Zheng[1]证明了下面的定理：

定理 A　如果(a) $f(0,0)<0$;　(b) $\exists\, a<0,b>0$，当 $x<a$ 和 $x>b$ 时，$f(x,v)\geqslant 0$，其中 $v\in R$，且对 $\forall\, x\in[a,b]$ 及 $v\in R$，有 $f(x,v)\geqslant -M$，其中 M 为一个正常数；　(c) $xg(x)>0\ (x\neq 0)$，对于 $G(x)\overset{\triangle}{=}\int_0^x g(\xi)d\xi$，有 $G(\pm\infty)=+\infty$;　(d) $f(x,v)$关于 x,v 是局部 Lipschitz 的，$g(x)$是局部 Lipschitz 的；　(e) 对于 $v\geqslant 0$ 和每个固定的 $x<a$，$vf(x,v)$是 v 的严格递增函数，且$\exists\, v_x>0$ 使 $v_xf(x,v_x)\geqslant -g(x)$. $u_L^*(x)=\max\limits_{s\leqslant x}u_L(x)$对每个 $x<a$ 存在，其中 $u_L(x)f(x,u_L(x))+g(x)=0$. 则方程组(2)至少有一个非零周期解.

特别地，对于下面的微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=v,\\ \dot{v}=-(x^2-4)(v^2+1)v-x,\end{cases} \tag{3}$$

Zheng[1]使用很大篇幅证明了(3)无非零周期解存在，但它满足文[2]中定理1的条件. 这样，文[1]就断定了文[2]中定理1的结论是错误的. 很遗憾的是，通过细心地检查文[1]中的这一繁锁证明过程，我们发现其证明中有错误. 限于篇幅，此处不打算详细指出其证明的错误所在. 本文的主要目的在于首先给出一个改进定理 A 后的新结论，然后再应用我们的结果证明方程组(3)至少有一个非零的周期解. 同时，我们的定理也在更弱的条件下包含了文[2]中的定理1，即在更弱的条件下证明了文[2]中定理1的正确性.

* 1991年11月7日收到. 国家自然科学基金资助项目.

2. 主要结果

定理 1 如果以下条件成立：

(i) $f(0,0)<0$;

(ii) $\exists\ a<0<b$，使当 $x<a$ 和 $x>b$ 时 $f(x,v)\geqslant 0$，其中 $v\in R$;

(iii) $xg(x)>0\ (x\neq 0)$，对于 $G(x)\overset{\triangle}{=}\int_0^x g(\xi)d\xi$ 有 $G(\pm\infty)=+\infty$;

(iv) $f(x,v)$ 关于 x,v 是局部 Lipschitz 的，$g(x)$ 是局部 Lipschitz 的；

(v) 存在 $K>0$ 及 $a^*<a$，使当 $x\leqslant a^*$ 时，$Kf(x,K)+g(x)\geqslant 0$.

则方程组(2)至少存在一个非零的周期解.

附注 1 定理 1 去掉了定理 A 中的条件：对于 $\forall\ x\in[a,b]$ 及 $v\in R$ 有 $f(x,v)\geqslant -M$. 此外，也还改进了定理 A 中的条件(e). 事实上，如果(e)成立，则可取 $a^*=a-1$ 及 $K=u_L^*(a^*)$，显然，$u_L^*(x)$ 在 $x\leqslant a$ 时是单调不减的. 从而对一切 $x\leqslant a^*$ 有 $u_L(x)\leqslant u_L^*(x)\leqslant u_L^*(a^*)=K$. 又由于对于 $v\geqslant 0$ 及对每个 $x<a$，$vf(x,v)$ 是 v 的严格递增函数，因此

$$Kf(x,K)+g(x)\leqslant u_L(x)f(x,u_L(x))+g(x)=0,\ x\leqslant a^*.$$

从而条件(v)成立. 但反之不真(见本文的例子).

下面我们来证明方程组(3)满足定理 1 的条件(i)—(v).

事实上，在(3)中相当于

$$f(x,v)=(x^2-4)(v^2+1),\ g(x)=x.$$

显然，条件(i)，(iii)和(iv)成立. 取 $a=-2,b=2$，则知条件(ii)成立. 取 $a^*=-3,K=1$，则知条件(v)成立. 据定理 1 知方程组(3)至少有一个非零的周期解.

下面的例子满足定理 1 的条件，但定理 A 的条件(e)不满足.

例 考虑微分系统

$$\begin{cases}\dot{x}=v,\\ \dot{v}=-\dfrac{x^2-4}{v^2+1}v-x,\end{cases}\tag{4}$$

这里相当于 $f(x,v)=\dfrac{x^2-4}{v^2+1}$，$g(x)=x$. 显然，条件(i)，(iii)和(iv)成立. 取 $a=-2,b=2$，则条件(ii)成立. 取 $K=1$ 及 $a^*=-4$，则知条件(v)成立. 因此由定理 1 知方程组(4)至少有一个非零周期解. 但由于 $vf(x,v)=v(x^2-4)/(1+v^2)$ 对于 $v\geqslant 0$ 及 $\forall\ x<a$，$vf(x,v)$ 并不是 v 的严格单调增加函数，因此，条件(e)不满足. 同样，也不满足文[2]中定理 1 的条件.

现在，我们来完成定理 1 的证明.

定理 1 的证明 由定理中条件，知系统(2)的初值问题的解存在且唯一，且原点为唯一有限奇点.

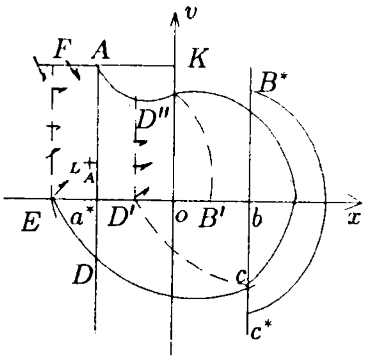
令 $\lambda(x,v)=\dfrac{1}{2}v^2+G(x)$，则

$$\frac{d\lambda}{dt}\Big|_{(2)}=-v^2f(x,v).\tag{5}$$

由条件(i)及(iv)，对于 $0<c_0\ll 1$，在闭曲线 $\lambda(x,v)=c_0$ 上的每一点 (x,v) 上 $f(x,v)$ 的取值为负．这样，在曲线 $\lambda(x,v)=c_0$ 上有 $d\lambda/dt|_{(2)}>0\ (v\neq 0)$，因此(2)的轨线凡与闭曲线 $\lambda(x,v)\equiv c_0$ 相交者当 t 增加时都是从其内部走向其外部．我们取闭曲线 $\lambda(x,y)=c_0$ 作为 Poincaré 环域的内境界线．

下面我们来构作环域的外境界线．

取点 $A=(a^*,K)$，并设 L_A^+ 表示(2)的在 $t=t_A$ 时从点 A 出发的正半轨线，记 L_A^+ 上的流动点为 $(x(t),y(t))$．现在我们来讨论当 t 增加时 L_A^+ 的走向．如下图如示，它只可能是从下三种情形之一：



(1)　L_A^+ 与线段 $\overline{ob}$ 交于点 B'；

(2)　L_A^+ 与直线 $x=b$ 交于点 B；

(3)　L_A^+ 停留在区域 $H=\{(x,v)\,|\,a^*\leqslant x<b, v>0\}$ 之内．

我们首先证明情形(3)不可能出现．假若不然，则根据在区域 D 内(2)无奇点的事实及内境界线的作法可知 L_A^+ 在 D 中必无界．又在 D 内我们有 $dx/dt=v(t)>0$．这样，L_A^+ 必存在垂直渐近线，即∃ $x_1\in(a^*,b]$ 使在 L_A^+ 上，当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to x_1$，$v(t)\to+\infty$，从而有 $dx(t)/dt=v(t)\to+\infty$（当 $t\to+\infty$ 时），这是不可能的．

现在我们考虑情形(2)．作过点 $B^*(b,v(t_b)+1)$ 的闭曲线

$$\lambda(x,v)=\frac{1}{2}(1+v(t_B))^2+G(b)$$

它与直线 $x=b$ 在下半平面交于点 $C^*(b,-(1+v(t_B)))$．由条件(ii)及(5)易知 L_A^+ 不可能穿过曲线段 $\widehat{B^*C^*}$，从而此时 L_A^+ 必与正半 x 轴相交，且当 t 连续增加时，L_A^+ 必与直线 $x=b$ 在下半平面内交于 C^* 上方的某点 C．

仿照前面的讨论，L_A^+ 从点 C 开始后只可能是下列两情况之一：

(1′)　L_A^+ 与线段 $\overline{a^*o}$ 相交于 D'；

(2′)　L_C^+ 与直线 $x=a^*$ 在下半平面内交于点 D．

对于情况(1′)．对点 D' 作 x 轴的垂线交轨线段 $\widehat{AB}$ 于 D''，则显然闭曲线 $\widehat{D''BCD'}\cup\overline{D'D''}$ 可作为其环域的外境界线．

对于情况(2′)，从条件(ii)易证 L_D^+ 将继续与负 x 轴交于点 E，再过点 E 作 x 轴的垂线交直线 $y=K$ 于点 F，这样，闭曲线 $\overline{FA}\cup\widehat{ABCDE}\cup\overline{EF}$ 可作为其环域的外境界线．因此，对情形(2)，根据 Poincaré 环域定理即知定理 1 的结论为真．

对于情形(1)，可采用情形(2)证明中类似的方法证明之．

类似地，我们还可证明下面的定理 2：

定理 2　设定理 1 的条件(i)－(iv)成立，如果

(v′)　∃ $K>0$ 及 $b^*>b$，使当 $x\geqslant b^*$ 时

$$-Kf(x,-K)+g(x)\leqslant 0,$$

则方程组(2)至少有一个非零的周期解.

参 考 文 献

[1] Zheng Zuo—Huan, *Periodic solutions of generalized lienard equations*, J. Math. Anal. Appl., 148(1990), 1—10.

[2] P. J. Ponzo and N. Wax, *Periodic solutions of generalized lienard equations*, J. Math. Anal. Appl., 104(1984), 117—127.

[3] G. Villari, *Periodic solution of lienard equations*, J. Math. Anal. Appl., 86(1982), 379—386.

Note on the Paper" Periodic Solutions of Generalized Lienard Equations"

Yu Jianshe *Huang Lihong*

(Dept. of Appl. Math., Hunan Univ., Changsha)

Abstract

In this paper, some new sufficient conditions ensuring that the generalized Lienard equation

$$x + f(x,x)x + g(x) = 0$$

has at least one non-zero periodic solution are obtained. Our results not only improve those in [1] but also correct an error appeared in [1].