第14卷第1期 1994年2月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 1 Feb. 1994

关于 Sikkema—Bernstein 算子的导数逼近*

徐淳宁　　何甲兴
（长春邮电学院，130012）（吉林工业大学，长春 130025）

设 f 定义在 $[0,1]$ 上，f 的 Bernstein 算子如下

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P_{nk}(x)\quad x\in[0,1],\tag{1}$$

其中 $P_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

Cheng 在[1]中研究了 $B_n(f,x)$ 对有界变差函数的逼近阶. 郭顺生[2]在条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n}}=0\tag{2}$$

的限定下，研究了下面的 Sikkema－Bernstein 算子[3]

$$C_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+a(n)}\right)P_{nk}(x)\tag{3}$$

对有界变差函数的逼近阶. 其中 $a(n)\geqslant0,\lim\limits_{n\to\infty}a(n)/n=0$.

记 $B\vee[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上有界变差函数的全体，本文给出了当 $f^{(m+1)}\in B\vee[0,1]$ 时，$C_n^{(m+1)}(f,x)$ 对 $f^{(m+1)}$ 的逼近阶. 设 m 是大于 -1 的整数，记 $h=1/(n+a(n))$ 和

$$\Delta_h^{m+1}f\left(\frac{k}{n+a(n)}\right)=\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^j\binom{m+1}{j}f\left(\frac{k+m+1-j}{n+a(n)}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-m-1.\tag{4}$$

则 $C_n(f,x)$ 的 $m+1$ 阶导数为

$$C_n^{(m+1)}(f,x)=\frac{n!}{(n-m-1)!}\sum_{k=0}^{n-m-1}\Delta_h^{m+1}f\left(\frac{k}{n+a(n)}\right)P_{n-m-1,k}(x).\tag{5}$$

我们证得

定理　设 $f^{(m+1)}\in B\vee[0,1]$，$a(n)/n^{1/2}\searrow0$，$(n\to\infty)$，对 $\forall\ x\in(0,1)$，当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}&\left|C_n^{(m+1)}f(x)-\frac{1}{2}\left(f^{(m+1)}(x+)+f^{(m+1)}(x-)\right)\right|\\&\leqslant\frac{5(m+1)\left(\|f^{(m+1)}\|+\bigvee_0^1(f^{(m+1)})\right)}{\sqrt{(n-m-1)x(1-x)}}\\&\quad+\frac{3(x(1-x))^{-1}}{n-m-1}\sum_{k=1}^{n-m-1}\bigvee_{(x-x)/\sqrt{k}}^{[x+(1-x)]/\sqrt{k}}(g_x(f^{(m+1)},t))\\&\quad+\frac{4+a(n)}{\sqrt{(n-m-1)x(1-x)}}\left|f^{(m+1)}(x+)-f^{(m+1)}(x-)\right|\end{aligned}$$

* 1991年1月26日收到.

$$+\frac{(m+1)(a(n)+1)}{2(n+a(n))}|f^{(m+1)}(x+)+f^{(m+1)}(x-)|, \tag{6}$$

其中 $\|f^{(m+1)}\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(m+1)}(x)|$，$\bigvee_a^b(g)$表函数 g 在$[a,b]$上的全变差，$g_x(f^{(m+1)},t)$如下

$$g_x(f^{(m+1)},t)=\begin{cases} f^{(m+1)}(t)-f^{(m+1)}(x+), & x<t\leqslant 1; \\ 0, & x=t, \\ f^{(m+1)}(t)-f^{(m+1)}(x-), & 0\leqslant t<x. \end{cases}$$

下面说明定理的收敛阶是不能改进的，考虑函数 $f(t)$，$f^{(m+1)}(t)=|t-x|$，由文[1]的(2.6)式知，当 $n-m-1>2/[x(1-x)]$时，有

$$\frac{1}{16}\left(\frac{x(1-x)}{n-m-1}\right)^{1/2}\leqslant B_{n-m-1}(f^{(m+1)},x)\leqslant\frac{5}{2}\left(\frac{x(1-x)}{n-m-1}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

又由

$$|C_n^{(m+1)}(f,x)-B_{n-m-1}(f^{(m+1)},x)|=o\left(\frac{1}{\sqrt{n-m-1}}\right),$$

当 n 足够大时，由(7)式知

$$|C_n^{(m+1)}(f,x)|\geqslant\frac{1}{17}\left(\frac{x(1-x)}{n-m-1}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

由(6)式有

$$|C_n^{(m+1)}(f,x)|\leqslant(5m+8)\frac{(x(1-x))^{-1}}{\sqrt{n-m-1}}. \tag{9}$$

比较(8)，(9)两式知，本文的收敛阶是不能改进的.

参 考 文 献

[1] Fuhua Cheng, J. Approx. Th., 39(1983), 3:259—274.

[2] 郭顺生，科学通报，20(1986)，1521—1526.

[3] 王仁宏，无界函数逼近，科学出版社，1983.