第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

L—fuzzy Locale理论与分配格的L—fuzzy拓扑表示*

张德学 刘应明
(四川大学数学系,成都610064)

摘 要 首先文中引入了L—fuzzy locale范畴,并证明了该范畴与满层L—fuzzy拓扑空间范畴的关系类似于locale与拓扑空间的联系.其次,文中建立了分配格的locale式fuzzy Stone表示,并且与经典结果一致,任一分配格的L—fuzzy locale表示的点空间就是它的L—fuzzy谱空间.

关键词 L—fuzzy locale, 满层L—fuzzy拓扑空间

§0 引 言

任一L—fuzzy拓扑空间的开集格形成一locale,于是把locale理论应用于L—fuzzy拓扑学的研究是自然的.如Rodabaugh[8]利用locale来反映或者说模型化L—fuzzy拓扑空间的格论性质.由于fuzzy拓扑空间较之一般拓扑空间多了一个层次构造,这样做难免许多缺陷,如不难看出满层L—fuzzy拓扑空间的开集格的locale积与乘积空间的开集格相差太远.文中,考虑到fuzzy拓扑空间的层次结构特点,引入了L—fuzzy locale的概念,并讨论了它与满层L—fuzzy拓扑空间的关系.另外借助于文[10]中分配格L—fuzzy理想的概念,建立了分配格的local式L—fuzzy tone表示.

文[10]中构造了分配格L—fuzzy谱空间.在经典情形,分配格的谱空间就是它的Stone表示空间,也是它的locale表示——它的理想格形成的locale——的点空间.本文证明了这一结论在fuzzy情形依然成立,即任一分配格的L—fuzzy谱空间就是它的local式L—fuzzy Stone表示的点空间.

文中L恒记一具有逆序对合对应的完备Heyting代数.

§1 L—fuzzy local范畴

定义1.1 一L—fuzzy locale定义为一序对(A,i_A),其中A为一locale;$i_A:L\to A$为一frame映射,即一保有限交,任意并映射.L—fuzzy locale之间的一连续映射$f:(A:i_A)\to(B,i_B)$定义为一frame映射$f:B\to A$满足$i_A=f\cdot i_B$.

容易看出L—fuzzy locale形成的范畴就是locale范畴在L之上的comma范畴Loc$\downarrow L$.称Loc$\downarrow L$的对偶范畴$L\downarrow$Frm为L—fuzzy frame范畴,其中Frm记frame范畴.$L\downarrow$Frm中对象、态射分别称为L—fuzzy frame与L—fuzzy frame映射.

任给满层L—fuzzy拓扑空间X,用$\Omega_L(X)$记X的开集格;定义$i_X\to\Omega_L(X)$如下:$\forall\ a\in L$,

* 1991年10月22日收到.国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助项目.

$i_X(a)$为 X 上取值 a 的常值开集，则$(\Omega_L(X),i_X)$为一 L－fuzzy locale.

用 L－fts 记满层 L－fuzzy 拓扑空间与 Zadeh 型连续映射形成的范畴. Ω_L:L－fts→Loc$\downarrow L$ 记如下定义的函子：Ω_L 把一满层 L－fuzzy 拓扑空间 X 映为$(\Omega_L(X),i_X)$，把任一连续映射 $f:X\to Y$ 映为 $\Omega_L(f)=f^{-1}:\Omega_L(Y)\to\Omega_L(X)$.

任给一 L－fuzzy locale，能否找到一 L－fuzzy 拓扑空间"最佳逼近"它？注意满层 L－fuzzy 拓扑空间的一个点相当于单点满层拓扑空间到它的一连续映射，自然地我们定义 L－fuzzy Locale(A,i_A)的一个点 p 为(L,id_L)到(A,i_A)的一连续映射即一 frame 映射 $P:A\to L$ 满足 $p\cdot i_A=id_L$. Lpt A 记(A,i_A)的点之集. $\forall\ a\in A$，定义 $\varphi_L(a)$:Lpt $A\to L$ 如下：$\forall\ p\in$ Lpt A，$\varphi_L(a)(p)=p(a)$. 则$\{\varphi_L(a)\mid a\in A\}$形成 Lpt A 上一满层 L－fuzzy 拓扑，并且 $\varphi_L(A,i_A)\to(\Omega_L(\mathrm{Lpt}\ A),i_{\mathrm{Lpt}\ A})$是一 L－fuzzy frame 映射.

定理 1.2　Lpt 形成一函子 Loc$\downarrow L\to$L－fts 且是 Ω_L 的右伴随.

证明　首先 Lpt 形成一函子 Loc$\downarrow\to$L－fts. 为此只须证任给 L－fuzzy frame 映射 $f:(A,i_A)\to(B,i_B)$，定义如下的映射 Lpt(f):Lpt $B\to$lpt A 连续：$\forall\ p\in$ Lpt B，Lpt$(f)(p)=pf$.

事实上，$\forall\ a\in A,p\in$ Lpt B，

$$(\mathrm{Lpt}(f))^{-1}(\varphi_L(a))(p)=\varphi_L(a)(\mathrm{Lpt}(f)(p))=\varphi_L(a)(p\cdot f)=pf(a)=\varphi_L(f(a))(p),$$

于是$(\mathrm{Lpt}(f))^{-1}(\varphi_L(a))=\varphi_L(f(a))$.

其次 Lpt 是 Ω_L 的右伴随. 为此只须证任给 L－fuzzy locale(A,i_A)，满层 L－fuzzy 拓扑空间 X 及连续映射 $f:X\to$Lpt A，唯一存在 L－fuzzy frame 映射 $f^*:(A,i_A)\to(\Omega_L(X),i_X)$使得下图交换，其中 $\eta_X\to$Lpt $\Omega_L(X)$为定义如下的连续映射：$\forall\ x\in X$，$U\in\Omega_L(X)$，$\eta_X(x)(U)=U(x)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Lpt}\ \Omega_L(X) \arrow[d, "\mathrm{Lpt}(f^*)"] \\ & \mathrm{Lpt}\ A \end{tikzcd}$$

存在性：令 $f^*=f^{-1}\cdot\varphi_L$ 即可.

事实上，首先 f^* 是一 L－fuzzy frame 映射，其次$\forall\ x\in X,a\in A$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Lpt}(f^*)\eta_X(x)(a)&=\eta_X(x)(f^*(a))=\eta_X(x)(f^{-1}\varphi_L(a))\\&=f^{-1}\varphi_L(a)(x)=\varphi_L(a)(f(x))=f(x)(a),\end{aligned}$$

即 Lpt$(f^*)\eta_X=f$.

唯一性由 f^* 满足$\forall\ x\in X,a\in A,f^*(a)(x)=f(x)(a)$直接知.

称(A,i_A)为一空间式 L－fuzzy locale，若 $\varphi_L:A\to\Omega_L(\mathrm{Lpt}\ A)=\varphi_L(A)$是一一映射；称满层 L－fuzzy 拓扑空间 X 是 Sober fuzzy 拓扑空间，若 $\eta_X:X\to$Lpt $\Omega_L(X)$是双射.

命题 1.3　(1) 任给 L－fuzzy locale(A,i_A)，(Lpt $A,\varphi_L(A)$)是一 Sober fuzzy 拓扑空间.

(2) 任给满层 L－fuzzy 拓扑空间 X，$(\Omega_L(X),i_X)$是一空间式 L－fuzzy locale.

(3) 空间式 L－fuzzy locale 形成的范畴等价于 Sober fuzzy 拓扑空间形成的范畴.

§2　分配格的 locale 式 fuzzy Stone 表示

这一节主要目的在于证明分配格范畴对偶于 L－fuzzy locale 范畴的某子范畴.

首先我们回顾一下[10]中关于分配格的 L－fuzzy 理想的主要结果. 以下 M,N 恒记分配

格.

定义 2.1[10] 设 $\lambda: M\to L$ 是一 fuzzy 集，则称

(1) λ 是一 L－fuzzy 下集，若 λ 保序；

(2) λ 是一 L－fuzzy 理想，若 λ 保有限并；

(3) λ 是一 L－fuzzy 素理想，若 λ 保有限并、有限交.

由定义知 M 上任一族 L－fuzzy 理想在逐点序下的并也是一 L－fuzzy 理想，由此 M 上全体 L－fuzzy 理想在逐点序下形成一完备格，记作 Idl(M)；称 Idl(M)的对偶格为 M 的 L－fuzzy 理想格，记作 $L-\mathrm{Idl}(M)$.

引理 2.2[10] 设 $f: M\to L$ 保序，则逐点序下含于 f 的最大 L－fuzzy 理想 f^* 满足：$\forall\, m\in M$，$f^*(m)=\bigwedge\limits_{\vee A=m}\bigvee\limits_{a\in A} f(a)$，其中 $A\subseteq M$ 为有限集. 称 f^* 为由 f 生成的 L－fuzzy 理想.

由引理 2.2 可直接验证

命题 2.3 $L-\mathrm{Idl}(M)$是一 frame.

定义 i_M: $L\to \mathrm{Idl}(M)$如下：$\forall\, a\in L$，$i_M(a)$定义为 $M\backslash\{0\}$上取常值 $a'\in L$ 的 L－fuzzy 理想. 不难知 i_M 是一 frame 映射，于是$(L-\mathrm{Idl}(M), i_M)$是一 L－fuzzy locale.

设 $f: M\to N$ 是分配格之间的格同态，$\mu: N\to L$ 是一 L－fuzzy 理想，则 $f^{-1}(\mu)=\mu f$ 是 M 中一 L－fuzzy 理想，称为 μ 在 f 下的逆象. 显然 N 中 L－fuzzy 素理想在 f 下的逆象是 M 中 L－fuzzy 素理想.

另一方面，任给 M 中 L－fuzzy 理想，定义 $f(L)(\lambda): N\to L$ 如下：$\forall\, n\in N$，$f(L)(\lambda)(n)=\bigwedge\limits_{f(m)\geq n}\lambda(m)$，[10]中证明了

命题 2.4 (1) $f(L)(\lambda)$是 N 中 L－fuzzy 理想；(2) $f^{-1}(f(L)(\lambda))\geq\lambda$；(3) 任给 N 上 L－fuzzy 理想 μ，$f^{-1}(\mu)\leq\lambda \Rightarrow \mu\leq f(L)(\lambda)$.

易知满足上述三条的 fuzzy 集唯一，于是我们称 $f(L)(\lambda)$为 λ 在 f 下的象，参见推论 2.6.

下面我们证明这一节的主要结果.

推论 2.5 对应 $M\to(L-\mathrm{Idl}(M), i_M)$形成遗忘函子 $U: L\downarrow\mathrm{Frm}\to D\,\mathrm{Lat}$ 的一左伴随，其中 $D\,\mathrm{Lat}$ 记分配格范畴.

证明 只须证任给 L－fuzzy frame(B, i_B)以及格同态 $f: M\to U(B, i_B)=B$. 唯一存在 L－fuzzy frame 映射 $f^*:(L-\mathrm{Idl}M, i_M)\to(B, i_B)$使

得右图交换：其中 $h_M: M\to L-\mathrm{Idl}M$ 为定义如下的格同态：$\forall\, m\in M$，$h_M(m)$定义为 $M\backslash\downarrow m$ 上的特征映射.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & L-\mathrm{Idl}\,M=U(I-\mathrm{Idl}\,M, IM) \arrow[d, "U(f^*)"] \\ & U(B,i_B)=B \end{tikzcd}$$

存在性：$\forall\, \lambda\in L-\mathrm{Idl}M$，令 $f^*(\lambda)=\bigvee\limits_{m\in M} i_B(\lambda'(m))\wedge f(m)$.

(1) f^* 保有限交即任给 $\lambda_1,\lambda_2\in L-\mathrm{Idl}M$，$f^*(\lambda_1\vee\lambda_2)=f^*(\lambda_1)\wedge f^*(\lambda_2)$.

首先，$f^*(\lambda_1\vee\lambda_2)\leq f^*(\lambda_1)\wedge f^*(\lambda_2)$显然，其次

$$\begin{aligned} f^*(\lambda_1)\wedge f^*(\lambda_2) &= \bigvee_{m\in M} i_B(\lambda_1'(m))\wedge f(m)\wedge\bigvee_{m\in M} i_B(\lambda_2'(m))\wedge f(m) \\ &= \bigvee_{m,n\in M} i_B(\lambda_1'(m))\wedge i_B(\lambda_2'(n))\wedge f(m\wedge n) \end{aligned}$$

$$\leqslant \bigvee_{m,n\in M} i_B(\lambda_1'(m\wedge n))\wedge\lambda'(m\wedge n))\wedge f(m\wedge n)$$
$$=\bigvee_{m\in M} i_B((\lambda_1\vee\lambda_2)'(m))\wedge f(m)=f^*(\lambda_1\vee\lambda_2).$$

(2) f^* 保任意并即任给$\{\lambda_\iota|\iota\in T\}\subseteq$L$-IdlM$，$f^*(\bigwedge_{\iota\in T}{}^*\lambda_\iota)=\bigvee_{\iota\in T}f^*(\lambda_\iota)$，其中$\bigwedge_{\iota\in T}{}^*\lambda_\iota$为逐点序下含于$\bigwedge_{\iota\in T}\lambda_\iota$的最大L－fuzzy理想.

首先，$f^*(\bigwedge_{\iota\in T}{}^*\lambda_\iota)\geqslant\bigvee_{\iota\in T}f^*(\lambda_\iota)$显然；反过来，注意到

$$\bigvee_{\iota\in T}f^*(\lambda_\iota)=\bigvee_{\iota\in T}\bigvee_{m\in M}i_B(\lambda_\iota'(m))\wedge f(m)=\bigvee_{m\in M}i_B((\bigwedge_{\iota\in T}\lambda_\iota)'(m))\wedge f(m),$$

由此欲证$f^*(\bigwedge_{\iota\in T}{}^*\lambda_\iota)\leqslant\bigvee_{\iota\in T}f^*(\lambda_\iota)$只须证任给保序映射$\lambda:M\to L$，$f^*(\lambda^*)\leqslant\bigvee_{m\in M}i_B(\lambda'(m))\wedge f(m)$，其中$\lambda^*$为逐点序下含于$\lambda$的最大L－fuzzy理想.

$$\begin{aligned}f^*(\lambda^*)&=\bigvee_{m\in M}i_B(\lambda^{*\prime}(m))\wedge f(m)=\bigvee_{m\in M}i_B(\bigvee_{\vee A=m}\bigwedge_{a\in A}\lambda'(a))\wedge f(m)\\&=\bigvee_{m\in M}(\bigvee_{\vee A=m}\bigwedge_{a\in A}i_B(\lambda'(a)))\wedge f(m)=\bigvee_{m\in M}(\bigvee_{\vee A=m}(\bigwedge_{a\in A}i_B(\lambda'(a)))\wedge\bigvee_{a\in A}f(a))\\&=\bigvee_{m\in M}(\bigvee_{\vee A=m}\bigwedge_{a\in A}(f(a)\wedge\bigvee_{b\in A}i_B(\lambda'(b)))\leqslant\bigvee_{m\in M}(\bigvee_{\vee A=m}\bigwedge_{a\in A}i_B(\lambda'(a))\wedge f(a)\\&=\bigvee_{m\in M}i_B(\lambda'(m))\wedge f(m)\end{aligned}$$

其中$A\subseteq M$为有限集.

(3) $f=f^*h_M$，$i_B=f^*i_M$显然.

唯一性：首先任给$\lambda\in$L$-$Idl$M$，$\lambda=\bigwedge_{a\in L}a\lambda^{[a]}$，其中$\lambda^{[a]}=\{m\in M|\lambda(m)\leqslant a\}$为$M$中一理想；$a\lambda^{[a]}:M\to L$为定义如下的L－fuzzy理想：

$$a\lambda^{[a]}(m)=\begin{cases}0, & m=0;\\ a, & m\in\lambda^{[a]}\backslash\{0\};\\ 1, & m\notin\lambda^{[a]}.\end{cases}$$

于是λ是L－fuzzy理想族$\{a\lambda^{[a]}|a\in L\}$在L－Idl$M$中的并. 易知$\forall\, a\in L$，$a\lambda^{[a]}$是$i_M(a')$与$M\backslash\lambda^{[a]}$上特征映射$k(\lambda^{[a]})$在L－Idl$M$中的交. 于是任给满足条件的L－fuzzy frame映射f^*，有

$$\begin{aligned}f^*(\lambda)&=\bigvee_{a\in L}f^*(a\lambda^{[a]})=\bigvee_{a\in L}f^*(i_M(a'))\wedge f^*(k(\lambda^{[a]}))\\&=\bigvee_{a\in L}i_B(a')\wedge f^*(k(\lambda^{[a]}))=\bigvee_{a\in L}i_B(a')\wedge\bigvee_{m\in\lambda^{[a]}}f(m)\\&=\bigvee_{a\in L}\bigvee_{m\in\lambda^{[a]}}i_B(a')\wedge f(m)=\bigvee_{m\in M}i_B(\lambda'(m))\wedge f(m).\end{aligned}$$

推论 2.6 $f:M\to N$是格同态，则f可唯一扩张为一L－fuzzy frame映射L－Idl(f)：(L－Idl$M$，i_M)→(L－Idl$N$，i_N)并且$\forall\,\lambda\in$L－Idl$M$，L－Idl$(f)(\lambda)=f(L)(\lambda)$.

证明 L－Idl(f)的存在唯一性由定理2.5直接知. 下面证$\forall\,\lambda\in$L－Idl$M$，L－Idl$(f)(\lambda)=f(L')(\lambda)$.

由定理2.5知，L－Idl$(f)(\lambda)=\bigvee_{m\in N}i_N(\lambda'(m))\wedge h_Nf(m)$. 于是在$Ld_N$中，L－Idl$(f)(\lambda)=\bigwedge_{m\in M}i_N(\lambda'(m))\vee k(\downarrow f(m))$，其中$k(\downarrow f(m))$表示$N\backslash\downarrow f(m)$上的特征映射. 由此，

$$\begin{aligned}\forall\, n\in N,\ \text{L}-\text{Idl}(f)(\lambda)(n)&=\bigwedge_{m\in M}i_N(\lambda'(m))(n)\vee k(\downarrow f(m))(n)\\&=\bigwedge_{f(m)\leqslant n}i_N(\lambda'(m))(n)=\bigwedge_{f(m)\geqslant n}\lambda(m).\end{aligned}$$

称L－fuzzy locale(A,i_A)为一coherent L－fuzzy locale若存在分配格M使得(A,i_A)同构于

$(L-\mathrm{Idl}M, i_M)$，称 coherent L－fuzzy locale 之间的连续映射 $f:(L-\mathrm{Idl}M, i_M)\to(L-\mathrm{Idl}N, i_N)$ 为一 coherent 映射若 f 由一格同态 $N\to M$ 诱导. 易知 coherent L－fuzzy locale 与 coherent 映射形成一范畴，并且该范畴对偶于分配格范畴. 于是称 $(L-\mathrm{Idl}M, i_M)$ 为 M 的 Locale 式 fuzzy Stone 表示.

§3 分配格的 L－fuzzy 谱空间

分配格 M 中所有 L－fuzzy 素理想之集称为 M 的 L－fuzzy 素谱，记为 $\mathrm{spec}_L M$.

任给 $P\in L-\mathrm{Idl}M, \lambda\in\mathrm{spec}_L M$，定义 $D_P(\lambda)=\bigvee\limits_{m\in M}\lambda(m)\wedge P'(m)$.

引理 3.1[10] (1) $D_0=1$，其中 D_0 中"0"记 M 上取值 0 的保有限并映射；

(2) $D_1=0$，其中 D_1 中"1"记 $M\setminus\{0\}$ 取值 $1\in L$ 的保有限并映射；

(3) $D_{P_1\vee P_2}=D_{P_1\wedge P_2}$；

(4) $D_{\bigwedge\limits_{t\in T}{}^{*}P_t}=\bigvee\limits_{t\in T}D_{P_t}$，其中 $\bigwedge\limits_{t\in T}{}^{*}P_t$ 表示 $\{P_t\mid t\in T\}\leqslant L-\mathrm{Idl}M$ 在 $L-\mathrm{Idl}M$ 中的并.

由引理 3.1 $\{D_P\mid P\in L-\mathrm{Idl}M\}$ 形成 $\mathrm{spec}_L M$ 上一 L－fuzzy 拓扑 $\delta_L(M)$，称 $(\mathrm{spec}_L M, \delta_L(M))$ 为 M 的 L－fuzzy 谱空间. 容易验证 $\delta_L(M)$ 是一满层 L－fuzzy 拓扑.

设 $f:M\to N$ 是一格同态，则 f 诱导一映射 $\mathrm{spec}_L f=f^{-1}:\mathrm{spec}_L N\to\mathrm{spec}_L M$.

命题 3.2[10] 设 $f:M\to N$ 是一格同态，任给 $P\in L-\mathrm{Idl}M$，$(\mathrm{spec}_L f)^{-1}(D_P)=D_{f(L)(P)}$，于是 $\mathrm{spec}_L f:(\mathrm{spec}_L N, \delta_L(N))\to(\mathrm{spec}_L M, \delta_L(M))$ 连续.

由上述命题知 spec_L 形成一反变函子 D Lat→L－fts. 在经典情形即 $L=2$ 时，分配格 M 的谱空间就是它的 locale 表示即它的理想格 IdlM 的点空间 pr IdlM. 下面我们证明这一结论在 fuzzy 情形依然成立，即

定理 3.3 反变函子 spec_L 自然同构于 Lpt L－Idl.

引理 3.4 分配格 M 中 L－fuzzy 素理想一一对应于 $(L-\mathrm{Idl}M, i_M)$ 中的点.

证明 定义 $\tau_M:\mathrm{spec}_L M\to\mathrm{Lpt}\ L-\mathrm{Idl}M$ 如下：$\forall\ \lambda\in\mathrm{spec}_L M, P\in L-\mathrm{Idl}M$，$\tau_M(\lambda)(P)=D_P(\lambda)$.

(1) τ_M 是良定义的. 首先由引理 3.1 知 $\tau_M(\lambda)$ 是一 frame 映射，余下只须证 $\tau_M(\lambda)i_M=id_L$. 任给 $a\in L$，$\tau_M(\lambda)i_M(a)=D_{i_M(a)}(\lambda)=\bigvee\limits_{m\in M}\lambda(m)\wedge(i_M(a))'(m)=a$.

(2) τ_M 是单射. 若存在 $m\in M$，$\lambda_1(m)\neq\lambda_2(m)$，令 $P\in L-\mathrm{Idl}M$ 为 $M\setminus\downarrow m$ 上的特征映射，则 $D_P(\lambda_1)=\lambda_1(m)\neq\lambda_2(m)=D_P(\lambda_2)$，于是 $\tau_M(\lambda_1)(P)\neq\tau_M(\lambda_2)(P)$.

(3) τ_M 是满射. $\forall\ q\in\mathrm{Lpt}\ L-\mathrm{Idl}M$，定义 $\lambda_q=qh_M:M\to L-\mathrm{Idl}\ M\to L$，容易验证 $\lambda_q\in\mathrm{spec}_L M$. 断言 $\tau_M(\lambda_q)=q$. 事实上任给 $P\in L-\mathrm{Idl}M$，由于 $P=\bigvee\limits_{a\in L}aP^{[a]}$，于是

$$\begin{aligned}q(P)&=\bigvee_{a\in L}q(i_M(a'))\wedge q(k(P^{[a]}))=\bigvee_{a\in L}a'\wedge\bigvee_{m\in P^{[a]}}q(k(\downarrow m))\\&=\bigvee_{a\in L}a'\wedge\bigvee_{m\in P^{[a]}}\lambda_q(m)=\bigvee_{a\in L}a'\wedge\bigvee_{m\in P^{[a]}}D_{k(\downarrow m)}(\lambda_q)\\&=\bigvee_{a\in L}a'\wedge D_{k(P^{[a]})}(\lambda_q)=\bigvee_{a\in L}\lambda_q(i_M(a'))\wedge\lambda_q(k(P^{[a]}))=\tau_M(\lambda_q)(P),\end{aligned}$$

其中 $k(P^{[a]}), k(\downarrow m)\in L-\mathrm{Idl}\ M$ 分别记 $M\setminus P^{[a]}, M\setminus\downarrow m$ 上的特征映射.

引理 3.5 $\tau_M:(\mathrm{spec}_L M, \delta_L(M))\to(\mathrm{Lpt}\ L-\mathrm{Idl}M, \varphi_L(L-\mathrm{Idl}\ M))$ 是同胚.

证明 由引理 3.4 τ_M 是双射.

(1) τ_M 连续. $\forall\ P\in L-\mathrm{Idl}\ M, \lambda\in\mathrm{spec}_L M$,

$$\tau_M^{-1}(\varphi_L(P))(\lambda) = \varphi_L(P)(\tau_M(\lambda)) = \tau_M(\lambda)(P) = D_P(\lambda)$$

于是 $\tau_M^{-1}(\varphi_L(P))=D_P$.

(2) τ_M^{-1} 连续. $\forall\ P\in \mathrm{L-Idl}\ M, q\in \mathrm{Lpt\ L-Idl}\ M$,

$$(\tau_M^{-1})^{-1}(D_P)(q) = D_P(\tau_M^{-1}(q)) = \varphi_L(P)(\tau_M\cdot\tau_M^{-1}(q)) = \varphi_L(p)(q)$$

于是 $(\tau_M^{-1})^{-1}(D_P)=\varphi_L(P)$.

定理 3.3 的证明 由引理 3.5 只须证 $M\to\tau_M$ 形成一自然变换 $\mathrm{spec}_L\to\mathrm{Lpt}\cdot\mathrm{L-Idl}$，即任给格同态 $f:M\to N$，下右图交换：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}_L N \arrow[r, "\tau_N"] \arrow[d, "\mathrm{Spec}_L f"] & \mathrm{Lpt}\ L-\mathrm{Idl}\ N \arrow[d, "C_{x}-\mathrm{Idl}(f)"] \\ \mathrm{Spec}_L M \arrow[r, "\tau_M"] & \mathrm{Lpt}\ L-\mathrm{Idl}\ M \end{tikzcd}$$

事实上 $\forall\ \mu\in \mathrm{spec}_L N, P\in \mathrm{L-Idl}M$，$\tau_M \mathrm{spec}_L f(\mu)(P) = \tau_M(\mu f)(P) = D_P(\mu f) = D_{f(L)(P)}(\mu)$，而 $\mathrm{Lpt\ L-Idl}(f)\tau_N(\mu)(P) = \tau_N(\mu)(\mathrm{L-Idl}(f)(P)) = \tau_N(\mu)(f(L)(P)) = D_{f(L)(P)}(\mu)$.

参 考 文 献

[1] G. Gierz, et al, *A compendium of Continuous lattices*, Springer—Verlag. 1980.

[2] U. Höhle, L. N. Stout, *Foundations of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 40(1991), 257—296.

[3] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridcg University, 1982.

[4] Liu Yingming and He ming, *Induced mappings on completely distributive lattices*, Proc. 15th. Inter. Symp. on multiple—valued logic, 1985.

[5] R. Lowen, *The order aspect of the fuzzy real line*, Manuscripta. Math. 39(1985), 293—305.

[6] I. G. Macdonald, *Algebraic Geometry*, W. A. Benjamin Inc, 1968.

[7] S. Maclane, *Categories for Working mathematician*, Spainger—Verlag, 1971.

[8] S. E. Rodabaugh, *Point—set lattice—theoretic topology*, Fuzzy sets and systems, 40(1991), 297—345.

[9] 王国俊，L—fuzzy 拓扑空间论，陕西师大出版社，西安，1988.

[10] 张德学，刘应明，分配格的 L—fuzzy 拓扑表示及 L—fuzzy 理想，数学年刊，1994 年 1 期.

L—fuzzy Locale Theory and a L—fuzzy Topological Representation for Distributive Lattice

Zhang Dexue *Liu Yingming*

(Dept. of Math., Sichuan Univ., Chengdu)

Abstract

The category of L—fuzzy locaks is introduced, and it is proved that the relation between this category and the category of Stratified L—fuzzy topological spaces is analogous to that between locales and topological spaces. The localic L—fuzzy version of Stone's representation theorem for distributive lattices is established, and it is proved that, in parallel to classical results, the point space of the localic fuzzy Stone's representation of a distributive lattice coincides with its L—fuzzy spectral space.