第14卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1994

局部域上的局部 Hardy 空间*

周广才　　苏维宜
(南京大学数学系, 210008)

摘　要　文献[1],[2],[3]中讨论了 R^n 上的局部 Hardy 空间, 并利用乘子定理证明了 $h_p(R^n)=F^0_{p,2}(R^n)$. 本文利用 Chebyshev 等式及正则函数的性质证明了在局部域上有类似的结果 $h_p(K^n)=F^0_{p,2}(K^n)$, 从而建立起函数空间之间的关系, 并由此给出一个乘子定理.

关键词　局部域, 局部 Hardy 空间, $F^0_{p,2}$ 空间

R^n 上的局部 Hardy 空间已有了系统的研究, 这方面的文献可参看[1],[2],[3]. 局部域上(更一般地, 齐次空间上)的 Hardy 空间的探讨也逐渐深入, 这方面的文献可参看[4]. 由于局部域的特殊性, 其上的空间理论的研究尚未系统化. 我们这里讨论 K^n 上的局部 Hardy 空间, 给出其等价表示, 把局部 Hardy 空间问题归结为 Triebel 型空间 $F^s_{p,q}$ 的问题.

设 K 为一固定的局部域, $\beta\in K$, 且 $|\beta|=\delta^{-1}$, 其中 δ 为一素数的幂. K^n 为其上的 n 维向量空间[6]. 设 $\varphi(x)$ 为定义于 K^n 上的一个检验函数, 且 $\varphi(0)=1$. 令 $\varphi_k(x)=\varphi(\beta^k x)=\varphi(\beta^k x_1,\cdots,\beta^k x_n)$, 则对 $0<p<\infty$, 定义

$$h_p(K^n)=\{f\in S'(K^n):\|f\|^{\varphi}_{h_p}=\|\sup_{k\in P}F^{-1}\varphi_k Ff\|_p<\infty\},$$

其中 F 和 F^{-1} 分别为 Fourier 变换和 Fourier 逆变换, Fourier 变换和 Fourier 逆变换分别定义为 $\int_{K^n}f(x)\overline{\chi}_Y(x)dx$ 和 $\int_{K^n}f(x)\chi_Y(x)dx$. 易证, 如果 $\varphi\neq 0$, 如上定义的空间 h_p 不依赖于 $\varphi\in S(K^n)$ 的选择, 因此不妨设 $\varphi=\Phi_0$ 为 $\mathscr{O}$ 上的特征函数, 其中 $\mathscr{O}=\{x\in K^n:|x|\leqslant 1\}$. 此时

$$h_p(K^n)=\{f\in S'(K^n):f^*\equiv\sup_{k\in P}F^{-1}\varphi_k Ff\in L_p\}.$$

K^n 上的 $F^s_{p,q}(K^n)$ 空间定义为[7]

$$F^s_{p,q}(K^n)=\{f\in S'(K^n):\|\delta^{ks}F^{-1}\dot{\varphi}_k Ff\|_{L_p(l_q)}<\infty\},$$

其中 $\dot{\varphi}=\Phi_0$, $\dot{\varphi}_k=\Phi_k-\Phi_{k-1}=\varphi_k-\varphi_{k-1}$, $k=1,2,\cdots$. 关于空间 $F^s_{p,q}(K^n)$ 的讨论见[7],[8].

对分布 $f\in S'(K^n)$, 正则函数 $f(x,k)$ 定义为

$$f(x,k)=F^{-1}\Phi_k Ff,\ k\in\mathbf{Z},$$

其中 $\Phi_k(\cdot)=\Phi_0(\beta^k\cdot)$ 为 P^{-k} 的特征函数. 令

$$d_0f(x)=f(x,0)=F^{-1}\Phi_0 Ff,$$

$$d_kf(x)=f(x,k)-f(x,k-1)=F^{-1}\dot{\varphi}_k Ff,\ k\in N.$$

定义 $sf(x)=(\sum_{k\in P}|d_kf(x)|^2)^{1/2}$. 下面将要证明 $\|sf\|_p\cong\|f\|_{h_p}$.

---

* 1991年9月25日收到. 国家自然科学基金资助项目.

引理 1 $\|sf\|_p \cong \|f\|_p,\ 1<p<\infty$.

证明 类似于[6]中的方法,见[6]中第五章第一节.

注 更一般地,[9]给出了 Vilenkin 群上的 Littlewood－Paley 定理,该引理可作为[9]中的特殊情况.

引理 2 $\|f\|_{h_p} \leqslant A_p\|sf\|_p,\ 0<p<2$.

证明 由 Chebyshev 等式 $\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{g>\lambda\}|d\lambda,\ 0<p<\infty$,只要证

$$|\{f^*>\lambda\}| \leqslant A\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{sf>t\}|dt,$$

其中 $\lambda>0$,A 为一常数,对固定的 $\lambda>0$,令

$$\sigma(x) = \inf\{m: s_m f(x)>\lambda\},$$

其中 $s_m f(x) = (\sum_{k\leqslant m}|d_k f(x)|^2)^{1/2}, m\in \mathbf{P}$. 我们约定,对空集$\varnothing$,$\mathrm{int}\varnothing=+\infty$. 对 $x\in K^*$,$\sigma(x)=m$,令

$$g(x,k) = \begin{cases} f(x,k), & \text{如果 } k\leqslant m-1, \\ f(x,m), & \text{如果 } k\geqslant m. \end{cases}$$

则 $sg(x)\leqslant\lambda, sg(x)\leqslant sf(x), \forall\ x\in K^*$. 另外,如果 $x\in\{\sigma=+\infty\}\subset\{sf\leqslant\lambda\}$,则有 $g^*(x)=f^*(x)$,且 $sg(x)=sf(x)$. 另一方面,如果 $\sigma(x)=m<+\infty$,则

$$|\{x:\sigma(x)<+\infty\}| \leqslant |\{x:sf(x)>\lambda\}|.$$

因此 $|\{f^*>\lambda,\sigma<+\infty\}| \leqslant |\{sf>\lambda\}| \leqslant 2\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{sf>t\}|dt$. 再由引理 1,

$$\begin{aligned} |\{f^*>\lambda,\sigma=+\infty\}| &\leqslant |\{g^*>\lambda\}| \leqslant c\lambda^{-2}\|g\|_2^2 = c\lambda^{-2}\|sg\|_2^2 \\ &= 2c\lambda^{-2}\int_0^\infty t|\{sg>t\}|dt = c'\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{sg>t\}|dt \\ &\leqslant c'\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{sf>t\}|dt. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |\{f^*>\lambda\}| &\leqslant |\{f^*>\lambda,\sigma<+\infty\}| + |\{f^*>\lambda,\sigma=+\infty\}| \\ &\geqslant A\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{sf>t\}|dt. \end{aligned}$$

引理 2 得证.

注 类似于[5],不难验证上面引理中的 $g(x), g(x,k)$都是有意义的.

引理 3 $\|sf\|_p \leqslant B\|f\|_{h_p},\ 0<p<2$.

证明 同理,只要证明对 $\lambda>0$,

$$|\{sf>\lambda\}| \leqslant 2\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{f^*>t\}|dt.$$

令 $\mu(x)=\mathrm{int}\{k\in\mathbf{P}:|f(x,k)|>\lambda\}$,并约定 $\mathrm{int}\varnothing=+\infty$. 如果 $\mu(x)=m$,令

$$g(x,k) = \begin{cases} f(x,k), & \text{如果 } k\leqslant m, \\ f(x,m+1), & \text{如果 } k\geqslant m+1. \end{cases}$$

因 此$\{\mu=+\infty\}=\{f^*\leqslant\lambda\}$,且对 $\mu(x)=+\infty$,有 $g(x,k)=f(x,k), k\in\mathbf{P}$. 故在$\{x:\mu(x)=+\infty\}$上,$sg(x)=sf(x)$,且 $g^*(x)=f^*(x)$,又

$$|\{sf>\lambda,\mu<+\infty\}|\leqslant|\{f^*>\lambda\}|\leqslant 2\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{f^*>t\}|dt.$$

由引理 1,

$$|\{sf>\lambda,\mu=+\infty\}|\leqslant|\{sg>\lambda\}|\leqslant\lambda^{-2}\|sg\|_2^2\leqslant c\lambda^{-2}\|g\|_2^2\leqslant c\lambda^{-2}\|g^*\|_2^2$$
$$\leqslant c\lambda^{-2}\cdot 2\int_0^\infty t|\{g^*>t\}|dt\leqslant c'\lambda^{-2}\int_0^\infty t|\{f^*>t\}|dt.$$

又由上面的讨论,$\{\mu=+\infty\}=\{f^*\leqslant\lambda\}$,因此

$$|\{sf>\lambda,\mu=+\infty\}|\leqslant c'\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{f^*>t\}|dt.$$

综上,$|\{sf>\lambda\}|<B\lambda^{-2}\int_0^\lambda t|\{f^*>t\}|dt$. 引理 3 获证.

定理 1 对 $0<p<\infty$, $\|f\|_{h_p}\cong\|sf\|_p=\|f\|_{F^0_{p,2}}$.

证明: 对 $0<p<2$,我们有

$$\|f\|_{h_p}=\|f^*\|_p\leqslant A\|sf\|_p\leqslant AB\|f^*\|_p=AB\|f\|_{h_p}.$$

对 $2\leqslant p<\infty$,显然有

$$\|f\|_p\leqslant\|f^*\|_p=\|f\|_{h_p}\leqslant\|Mf\|_p\cong\|f\|_p\cong\|sf\|_p,$$

其中 Mf 为 f 的 Hardy-Littewood 极大函数. 定理得证.

由引理 1,定理 1,得到下面结论.

推论 当 $1<p<\infty$ 时,$h_p=L_p=F^0_{p,2}=H_p$.

由此推论,对局部 Hardy 空间 h_p,Hardy 空间 H_p 的研究,我们仅限于 $0<p\leqslant 1$ 的情况,由定理 1,对 h_p 空间的研究可以转换为对 Triebel 型空间 $F^0_{p,2}$ 的研究. 利用 $F^s_{p,q}$ 空间理论,我们有下面结论:

(i) 当 $0<p<1$ 时 h_p 的对偶空间 $(h_p)^*=B^{n(1/p-1)}_{\infty\infty}$;

(ii) h_1 的对偶空间 $(h_1)^*=F^0_{\infty,2}$.

类似于 R^n 上的情形,我们可以讨论 b_{mo} 空间,h_p 空间与 H_p 空间的关系,这里从略. 利用定理 1,我们给出 h_p 空间的一个乘子定理.

对 $x\in K^n$,令 $\langle x\rangle=\max\{1,|x|\}$. 特殊的 Bessel 位势空间 H_2^S 定义为

$$H_2^S=\{f\in S'(K^n):\|f\|_{H_2^S}=\|\langle\cdot\rangle^S(Ff)(\cdot)\|_2<\infty\}.$$

设 $m(x)\in L_\infty$, $\|m\|_{h_2^\kappa}=\|\Phi_0 m\|_{H_2^\kappa}+\sup_{k\in N}\|(\Phi_1-\Phi_0)m(\beta^k\cdot)\|_{H_2^\kappa}$. 则有下面的定理.

定理 2 设 $0<p<\infty$, $\kappa>\frac{n}{2}+\frac{n}{\min(p,2)}$,则存在常数 $c>0$,使得

$$\|F^{-1}mFf\|_{h_p}\leqslant c\|m\|_{h_2^\kappa}\cdot\|f\|_{h_p}$$

对所有函数 $m(x)\in L_\infty(K^n)$ 和 $f\in h_p(K^n)$ 成立.

证明 由定理 1

$$\|F^{-1}mFf\|_{h_p}=\|F^{-1}MFf\|_{F^0_{p,2}}=\|F^{-1}m\dot\varphi_k Ff\|_{L_p(l_2)}$$
$$=\|F^{-1}m\dot\varphi_k\dot\varphi_k Ff\|_{L_p(l_2)}=\|F^{-1}m\dot\varphi_k FF^{-1}\dot\varphi_k Ff\|_{L_p(l_2)}.$$

由[7]中定理 1.2.2

$$\|F^{-1}m\dot\varphi_k FF^{-1}\dot\varphi_k Ff\|_{L_p(l_2)}\leqslant c\sup_k\|(\dot\varphi_k m)(\beta^{-k}\cdot)\|_{H_2^\kappa}\cdot\|F^{-1}\dot\varphi_k Ff\|_{L_p(l_2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= c \sup_k \| \dot{\varphi}_k(\beta^{-k} \cdot) \|_{H_2^\kappa} \cdot \| F^{-1} \dot{\varphi}_k F f \|_{L_p(l_2)} \\
&\leqslant c \| m \|_{H_2^\kappa} \| f \|_{F_{p,2}^0} \leqslant c' \| m \|_{H_2^\kappa} \| f \|_{h_p}.
\end{aligned}
$$

定理得证.

注 除定理 2 外,上面结论都适用于更一般的齐型空间:Vilenkin 群,证明方法类似,只需作一些适当调整.

参 考 文 献

[1] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. 46(1979), 27—42.

[2] D. Goldberg, *Local Hardy Spaces*, Proc. Symp. Pure Math. 35, I, 1979, "Harmonic Analysis in Euclidean Spaces", 245—248.

[3] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monographs in Math., Vol 78, 1983.

[4] R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bulltin of AMS, 83:4(1977), 569—645.

[5] Chao Jiaarng, *Lusin area functions on local fields*, Pacific Journal of Math., 59:2(1975), 383—390.

[6] M. H. Taiblson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, 1975.

[7] Zhou Guangcai and Su Weiyi, *Elementary aspects of $B^s_{p,q}(K^n)$ and $F^s_{p,q}(K^N)$ spaces*, to appear.

[8] Zhou Guangcai, *Equivalent quasi—norms and representations on $B^s_{p,q}(K^n)$ and $F^s_{p,q}(K^N)$*, to appear.

[9] R. E. Edwards and G. I. Gaudry, *Littlewood—Paley and Multiplier Theory*, Springer—Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

Local Hardy Spaces over Local Fields

Zhou Guangcai *Su Weiyi*

(Dept. of Math., Nanjing Univ.)

Abstract

Local Hardy spaces over R^n have been discussed in [1], [2] and [3] and we get $h_p(R^n) = F^0_{p,2}(R^n)$. In this paper, by the Chebyshev equality and the properties of regular functions we get the same result $h_p(K^n) = F^0_{p,2}(K^n)$, by which we set the relationships between function spaces and give a multiplier theorem.