第14卷第2期
1994年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 2
May 1994

两分子饱和反应系统的全局稳定性*

赵 振 海

(大连理工大学应用数学系，116024)

本文讨论了下列系统的全局稳定性：

$$\begin{cases}\dot{x} = J_1(1+x+y+Ax^2) - x(1+x+y+Ax^2) - Bxy \equiv P(x,y) \\ \dot{y} = J_2(1+x+y+Ax^2) - Bxy \equiv Q(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

其中 J_1, J_2, A, B 为非负常数. $(x,y) \in \overline{R} = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

当 $J_1 > (1+\frac{1}{B})J_2$ 时，系统(1)有唯一正平衡点 $R(x^*,y^*)$，其中 $x^* = J_1 - J_2$, $y^* = J_2[1+J_1-J_2+A(J_1-J_2)^2]/(BJ_1-(B+1)J_2)$.

(1) 当 $J_1 - 3J_2 \geqslant 0$ 时，$R(x^*,y^*)$ 为稳定的平衡点；

(2) 当 $J_1 - 3J_2 < -(1+Bx^*+(B+1)y^*)/(1+Ax^*)$ 时，$R(x^*,y^*)$ 为不稳定的平衡点.

定理 当 $J_1 - 3J_2 \geqslant 0$, $J_2 > \max\{By^*, \frac{Bx^*}{2+B+J_1}\}$ 时，则系统(1)的正平衡点 $R(x^*,y^*)$ 为全局稳定性的.

证明 对(1)作变换 $dt = \frac{d\tau}{(Bx-J_2)((B+1)x-J_1)^2}$，变换后，记 τ 仍为 t，则(1)可以写为

$$\begin{cases}\dot{x} = \left[\frac{J_1(1+x+Ax^2)-x(1+x+Ax^2)}{(B+1)x-J_1} - \frac{J_1(1+x^*+Ax^{*2})-x^*(1+x^*+Ax^{*2})}{(B+1)x^*-J_1} - y + y^*\right] \\ \quad \cdot \frac{1}{(Bx-J_2)((B+1)x-J_1)} \\ \dot{y} = \left[\frac{J_2(1+x+Ax^2)}{Bx-J_2} - \frac{J_2(1+x^*+Ax^{*2})}{Bx^*-J_2} - y + y^*\right]\frac{1}{((B+1)x-J_1)^2}\end{cases} \tag{2}$$

取 Liapunov 函数

$$v(x,y) = \int_{x^*}^{x}\left[\left(\frac{J_2(1+x+Ax^2)}{Bx-J_2} - \frac{J_2(1+x^*+Ax^{*2})}{Bx^*-J_2}\right) \Big/ \frac{(B+1)x-J_1}{Bx-J_2}\right]dx + \int_{y^*}^{y}(y-y^*)dy,$$

显然，当 $x=x^*, y=y^*$ 时，$v(x^*,y^*)=0$；而当 $x \neq x^*, y \neq y^*$ 且 $J_2 > \max\{By^*, \frac{Bx^*}{2+B+J_1}\}$ 时，$v(x,y) > 0$，并在域 R 中 $v(x,y)$ 具有无穷大性质的正定函数，且有 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)} < 0$.

因此，系统(1)的正平衡点 $R(x^*,y^*)$ 在第1象限内是全局稳定性的.

* 1992年10月5日收到.