第14卷第2期
1994年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 2
May 1994

同宿及异宿轨线的研究近况*

冯贝叶
(中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

近来年，在研究分支问题和混沌现象时，对同宿轨线(在平面情况下即分界线环)和异宿轨线的研究引起了专家们的广泛兴趣及普遍注意(见[3]－[7]，[10]，[48]－[49]，[55])．本文就作者所知对此问题作一综述．

考虑系统 $\dot{x}=f(x)$ 或更一般地 $\dot{x}=f(x,t)$，其中 $x\in R^n$，$f\in C^r$，$r\geq 1$．

设 p,q 表示系统的双曲不动点．所谓系统的与 p 相连的同宿轨线(homoclinic orbit)是指这样一条轨线 $s_p: x=x(t)$，当 $t\to\pm\infty$ 时，$x(t)\to p$，而与 p,q 相连的异宿轨线(heteroclinic orbit)是指轨线 $s_{pq}: x=x(t)$，当 $t\to-\infty$ 时，$x(t)\to p$，当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to q$．若干条异宿轨线可以形成一个环，过奇点 $o_1,o_2,\cdots,o_n$ 的异宿环常记为 $s^{(n)}_{o_1,o_2,\cdots,o_n}$．当 $n=2$ 时同宿轨线就是通常所说的鞍点分界线环(见图1,2,3)．

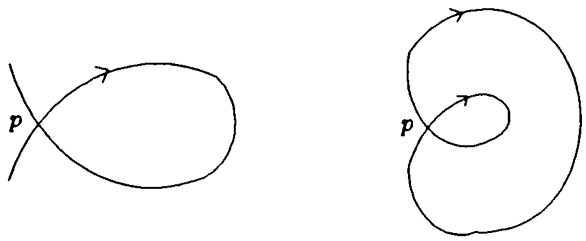


图1. 同宿环的例子(平面)

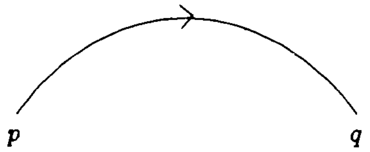
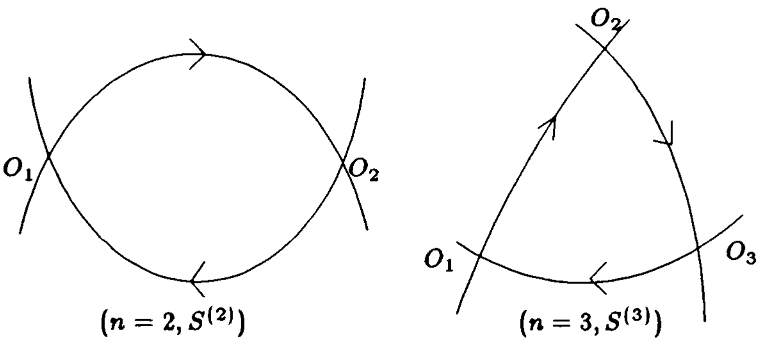


图2. 异宿轨线的形象(平面)



$(n=2, S^{(2)})$ $(n=3, S^{(3)})$

图3. 异宿环的例子(平面)

关于同宿和异宿轨线的研究包含以下几方面的内容：

* 1991年12月29日收到.

Ⅰ. 同宿、异宿轨线，同宿异宿环的存在性；

Ⅱ. 同宿，异宿环的稳定性；

Ⅲ. 鞍点的稳定流形和不稳定流形的相对位置；

Ⅳ. 同宿，异宿轨线，同宿，异宿环的分支；

关于Ⅳ的研究又包括以下几个方面

Ⅳ1. 确定所有可能出现的分支类型；

Ⅳ2. 讨论某种类型的分支的数目；

Ⅳ3. 确定分支的稳定性；

Ⅳ4. 给出判别以上问题的解析条件；

关于问题Ⅰ，可以说是研究下面几个问题的基础. 如果我们手边不掌握一批比较丰富的例子，那么对后面几个问题的讨论一方面是空泛的，另一方面讨论的结果也难以验证. 最简单的方法是从 Hamilton 系统出发去讨论问题. 因为对 Hamilton 系统确定同宿异宿轨线是否存在基本上是一个解析几何的问题，相对来说比较容易. 第二个方法是人为构造例子. 在构造例子的方法中比较有效也比较重要的一种方法是对系统

$$\dot{x} = P_0(x,y),\ \dot{y} = Q_0(x,y) \qquad (\mathrm{I})$$

选择一个适当的函数 $F(x,y)$，使 $F(x,y)=0$ 表示一条过鞍点的闭曲线 L_0 且

$$\frac{dF}{dt}\Big|_{(1)} = F_xP_0 + F_yQ_0 = FB,$$

其中 B 是 L_0 所在区域及其邻域内正则的函数，那么就可以断言系统Ⅰ存在分界线环 L_0，此方法适用于非 Hamilton 系统. 构造例子的第二个方法是构造旋转向量场，L_0:$F(x,y)=0$ 是系统（Ⅰ）的分界线环，则可断言 L_0 也是系统

$$\dot{x} = P_0 + FP_1,\ \dot{y} = Q_0 + FQ_1 \qquad I(P_0,Q_0,P_1,Q_1,F)$$

的分界线环. 用此方法可以从一个较简单的存在分界线环的向量场得到一个较复杂的存在分界线环的向量场. 具体例子可见[13]，[15]，[16]，[7]，[8]，[9]，[37]，[38]，[22]，[50]，[20]，[21]，[13]，[58]. 第三个方法是讨论特定类型的分界线环，如讨论二次系统三次系统的二次曲线或三次，四次曲线构成的分界线环. 用此方法也可获得相当丰富的例子，可参看[59]，[60]及[7]的 12—16 章及书末所列有关的参考文献，此处就不一一列举了. 然而更有意义的工作是所谓的硬问题，即对给定的系统（即不能由研究者任意自行构造的），如给定好的二次系统或 Lorenz 系统来研究分界线环或同宿，异宿轨线的存在性. 可惜目前这方面的结果尚不多，目前大多数写不出轨线方程的分界线环或异宿环存在性的结果是用小扰动方法得到的如[37]，[38]. 对某些特殊系统，[8]，[9]作了大范围分析.

关于问题Ⅱ，1963 年[11]首次获得了一个较重要的结果，其意义主要有两个：

1. 给出了解决这一问题的一个有效方法；

2. 首次获得了判别分界线相互位置的解析判据.

这一方法现已获得了广泛的应用，通称 Мельников 方法，而其判别函数通称 Мельников 函数. 在做进一步的回顾之前，我们先简单复习一下 Мельников 的方法与结果（不完全按照原文而是根据文献进行了改写以突出其实质.）

考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0(x,y) + \varepsilon P_1(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} &= Q_0(x,y) + \varepsilon Q_1(x,y,\varepsilon) \end{aligned} \qquad I(\varepsilon)$$

系统 $I(0)$ 含有分界线环 L_0，经扰动后破裂，变成系统 $I(\varepsilon)$ 的鞍点 $O(\varepsilon)$ 的稳定流形和不稳定流形 $L_{\varepsilon s}$ 及 $L_{\varepsilon u}$，问题是要确定 $L_{\varepsilon u}$ 和 $L_{\varepsilon s}$ 的相互位置.

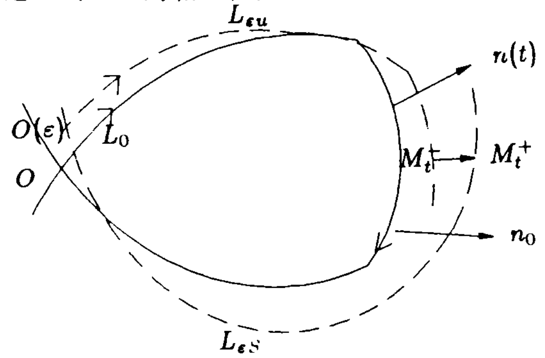


图 4　分界线环的破裂

在 $L_{\varepsilon u}$ 及 $L_{\varepsilon s}$ 上各取对应于 t 时刻的一点 M_t^+ 及 M_t^- 就得到一个依赖于时间 t 及参数 ε 的向量 $M_t^-M_t^+$. 显然这个向量的方向就确定了 $L_{\varepsilon u}$ 及 $L_{\varepsilon s}$ 的相互位置. 但是如果我们只着眼于 $M_t^-M_t^+$ 本身便无法下手研究. 因为我们只知道关于系统 $I(0)$ 的较详细的信息，而 $M_t^-M_t^+$ 则完全不包含这方面的信息. Мельников 的方法就是再在未扰动系统 $I(0)$ 的分界线环上取对应于 t 时刻的外法向量 $n(t)$，然后通过比较向量 $M_t^-M_t^+$ 与 $n(t)$ 的方向是相同还是相反就可确定 $L_{\varepsilon u}$ 及 $L_{\varepsilon s}$ 的相互位置，即当 $M_t^-M_t^+$ 与 $n(t)$ 同向时，$L_{\varepsilon u}$ 在 $L_{\varepsilon s}$ 之外，反之则 $L_{\varepsilon u}$ 在 $L_{\varepsilon s}$ 之内. 由此自然立刻想到要考察 $M_t^-M_t^+$ 与 $n(t)$ 的内积，按 Мельников 原来的记法即考察函数

$$\Delta_\varepsilon(t) = -\, n(t) \cdot M_t^-M_t^+,$$

但函数 $\Delta_\varepsilon(t)$ 仍是无法计算的. Мельников 的下一步是证明当 ε 充分小时成立展式

$$\Delta_\varepsilon(t) = \Delta_1(t)\varepsilon + \Delta_2(t)\varepsilon^2 + \cdots,$$

并证明 $\Delta_1(t)$ 满足微分方程

$$\frac{d\Delta_1(t)}{dt} = \sigma(t)\Delta_1 - D(t), \tag{1}$$

其中

$$\sigma(t) = \mathrm{div}(P_0,Q_0)\big|_{x=\varphi(t),y=\psi(t)},$$

$$D(t) = \left[\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{x=\varphi(t),y=\psi(t),\varepsilon=0},$$

而 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 是 L_0 的参数方程.

这样一来，我们在 ε 充分小时可通过 Δ_1 的符号得知 Δ_ε 的符号，而 Δ_1 是可以算出的（在定义 $\Delta_\varepsilon(t)$ 时也可以不取 L_0 上 t 时刻处的外法向量，而取其它某个向量做比较的基础，不过这时得出的是 $x_1(t)$，$y_1(t)$ 的变分方程组，其中 $x_1(t)$，$y_1(t)$ 是 $L_{\varepsilon u}$ 及 $L_{\varepsilon s}$ 关于 ε 展开式中 ε 的系数，而不能得到象(1)这样简明的式子).

Мельников 在得出(1)式后，写到"积分上述方程，容易得到…"就直接得出

$$\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[D(t)e^{-\int_0^t \sigma(\xi)d\xi}\right]dt.$$

这就是所谓的 Мельников 判据. 通过细致地研究原文,[12]发现,积分(1)式仅能得出:

$$\Delta_1(0)=\Delta_1^+(T^+)e^{-\int_0^{T^+}\sigma(t)dt}-\Delta_1^-(T^-)e^{-\int_0^{T^-}\sigma(t)dt}+\int_{T^-}^{T^+}[D(t)e^{-\int_0^t\sigma(\xi)d\xi}]dt. \quad (2)$$

由此可见,只有在上式中前两项都趋于零(当 $T^+\to+\infty$ 及 $T^-\to-\infty$ 时)时才能用 Мельников 函数作为 $\Delta_\epsilon(0)$的一次近似的主部. [12]并严格证明了当鞍点是初等奇点(两特征值均不为零)时,(2)式中的前两项(所谓余项)确实在 $T^+\to+\infty, T^-\to-\infty$ 时消失([12]引理 7)(由于 Мельников 当时所考虑的系统是假设鞍点是初等的,因此他可能认为这一点是当然的). 但是对于高阶奇点(或所谓非双曲奇点)而又有双曲域并存在分界线环的情况,[12]的作者曾举出反例说明上述余项可能不趋于零,因此讨论余项问题是有意义的. 对于有齐次主部的系统,即形如

$$\dot{x}=P_0+\varepsilon P_1,\ \dot{y}=Q_0+\varepsilon Q_1 \qquad I(\varepsilon)$$

$$P_0=R_1+f_1,\ Q_0=R_2+f_2$$

(其中 $P_0=P_0(x,y), Q_0=Q_0(x,y), P_1=P_1(x,y,\varepsilon), Q_1=Q_1(x,y,\varepsilon)$, R_1, R_2 是 m 次齐多项式, P_1, Q_1 至少是 m 次的, f_1, f_2 至少是 $m+1$ 次的)的系统,[13]给出一个余项消失的条件(即[13]引理 3). [39]通过定义"压制性"概念对余项问题的讨论作了总结. 即给出了下面的定理([39]定理 2,定理 3):若(1) 系统 $I(0)$是 Hamilton 系统或(2) $I(0)$的鞍点 O 是双曲的,即 $\det A<0$,其中 A 是系统在 O 点的线性化矩阵或(3) $m+1-|\pi^*|>0$,其中

$$\pi^*=\frac{R_{1x}^1+R_{2y}^1}{R_1}\Big|_{x=1,y=k^*}\quad (* \text{ 表示“+”号或“−”号})$$

k^* 是 O 的稳定流形(k^+)或不稳定流形(k^-)在 O 点的斜率. 则(2)式中的余项消失,即可用 Мельников 判据作为 Мельников 函数一次近似的主部,这时可用 $\Delta_1(0)$来判别扰动系统中分界线的相互位置.

在上述定理成立的条件下,我们有

定理 1([12]定理 2) 设 ε 充分小,则当

$\varepsilon\cdot\Delta_1(0)<0$ 时, $u^+>u^-$ (L_ε^+ 在 L_ε^- 之外);

$\varepsilon\cdot\Delta_1(0)>0$ 时, $u^+<u^-$ (L_ε^+ 在 L_ε^- 之内).

(见图 5,图 6)

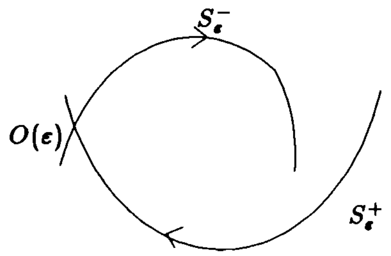


图5. $\varepsilon\cdot\Delta_1(0)<0$ 的情况

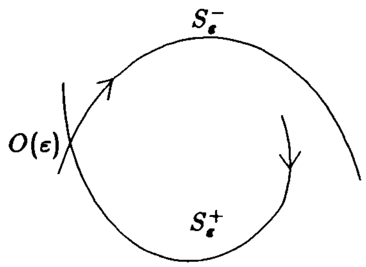


图6. $\varepsilon\cdot\Delta_1(0)>0$ 的情况

我们指出,对余项消失条件的研究远没有结束. 对具有非齐次主部的系统,这一问题尚未研究过,即使是对于有齐次主部的系统,[13]引理 3 也是尚未达到"极限"的结果(所谓达到极

限，我们指的是当 $m=1$ 时，系统就成为双曲的了，这时一个达到"极限"的结果应该能包括双曲情形的结果，而[13]引理 3 尚不能做到这一点). 另外，在余项确不能消失的情况下，又应该怎样去计算它也是可研究的课题.

当 $\Delta_1(0)=0$ 时，利用 $\Delta_\varepsilon(0)$ 的一次近似已不能确定 $\Delta_\varepsilon(0)$ 的符号，这时要考察所谓高阶 Мельников 函数. [40]和[50]分别独立地研究了这一问题，给出了二阶 Мельников 函数的表达式. 二者所给的判据形式上不同. [40]可通过原系统的右端直接计算得出判定量，而[50]则需先解一个变分方程，再通过这一变分方程的解去计算判定量. 尚未通过用两种方法计算同一例子的途径来比较二者.

关于问题Ⅲ，以上谈得都是已知未扰动系统有一个分界线环，经扰动破裂后如何确定两分界线的相互位置，因此始终是小扰动问题. 对于大范围的情况，结果几乎还没有. 而且问题应该如何提也不太清楚(什么算已知的情况). 目前只能这样提出问题：考虑系统

$$\dot{x}=P(x,y),\ \dot{y}=Q(x,y) \qquad (\mathrm{I})$$

并设 $O(0,0)$ 是系统的鞍点，要确定

1. 在什么条件下，O 的稳定流形 L_s 与不稳定流形 L_u 都与系统的某一截痕同时相交.

2. 在 L_s 和 L_u 都与某一无切弧相交的条件下，给出判别其相互位置的条件.

[56]，[57]都曾处理过这一类问题. 但现在看来，给出一个"好"的条件是不容易的. 所谓"好"的条件是指当系统(Ⅰ)变为系统 $I(\varepsilon)$ 时，这一条件应变为 Мельников 条件. 但这里有一个困难，即在系统 $I(\varepsilon)$ 中我们是把 $I(0)$ 的分界线环 L_0 的信息作为已知情况的，而在系统(Ⅰ)中却不允许把 L_s 和 L_u 算成已知的(否则就不要研究了). 因此当系统(Ⅰ)变为系统 $I(\varepsilon)$ 时我们已知的信息是增加了，但如何表达(用解析式子)这一过程还不清楚. 上面所说的问题应怎么提尚不清楚即指的这一困难. 总之，这一问题还值得深入研究. 有许多重要的问题也有赖于分界线相互位置的确定.

问题Ⅰ研究的历史远比Ⅲ，Ⅳ久远. 早在 1923 年，[1]在方程右端为解析的条件下即用所谓半正则函数的方法证明了以下的

定理 2 当 $\sigma<0(>0)$ 时，L 是稳定(不稳定的)，其中 L 是系统(Ⅰ)的分界线环，与鞍点 $O(x_0,y_0)$ 相连，而 $\sigma=\mathrm{div}(I)|_{(x,y)=O(x_0,y_0)}$.

但其证明相当烦琐. [2]系统地讨论了后继函数，用此方法在 1958 年在右端是 C^1 类函数的条件下证明了上述定理. 1963 年[11]在右端为 C^1 的条件下给上述定理以一个很直观的证明. 从[11]的证明可以很清楚地看出为什么在 $\sigma\neq0$ 时，即在所谓粗情况下，仅用鞍点本身的信息就决定了 L 的稳定性. 下面可以看到，对临界情况，一般来说是做不到的. 1982 年，[5]又给上述定理以一个面貌全新的处理. 不过[5]和[11]都要用到 $\int_0^\tau \mathrm{div}(I)|_{(x,y)\in\gamma}dt$ 的符号(其中 γ 是 L 邻近的一条轨线，τ 是 γ 完成一个回复映射所用的时间)确定了 L 的稳定性这一事实，而这一式子是在算后继函数的导数时导出的，因此[2]的工作是一个基础性的工作. 1968 年[14]在右端为 C^2 的条件下，引进局部坐标重新证明了上述定理并将他的方法应用到异宿环获得了异宿环粗情况时稳定性的判据. 下面将要看到在从同宿环稳定性的研究转向异宿环稳定性的研究时，[14]的结果起了路标的作用. [15]用旋转向量场的方法也给予上述定理一个新的证明. 但综观全部结果和研究此问题的过程，以[11]，[14]，[5]中的三种方法最有特色和启发性，而

[2]的工作则是三者的基础.

当粗情况分界线环稳定性的判别问题解决后，研究者开始思考当 $\sigma=0$ 时，即临界情况时如何判别稳定性的问题. 关于这一问题，最早的探讨可见[15]，例如[15]曾设想过把鞍点作泰勒展开，用展开式首项不为零的系数决定稳定性，但这一设想已被他们自己举出反例所否定. 现在已经很清楚仅通过鞍点本身的信息在临界情况下不可能确定分界线环的稳定性. [15]证明了下述

引理 1 积分 $\int_{L_0}\operatorname{div}(I)|_{(x,y)\in L_0}dl$ 收敛(发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$)，若 $\sigma=0(\sigma\neq 0)$.

这一引理为临界情况下分界线环稳定性判据的表达扫清了障碍.

在发现临界情况下分界线环稳定性的判据时，下面的类比起了重要作用：根据积分 $\oint_{\Gamma}\operatorname{div}(I)dl$ 决定了极限环的稳定性，人们有理由猜想积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{div}(I)|_{(x,y)\in L}dl$ 决定 L 的稳定性. 也就是，更确切地说，人们有理由猜测下面的定理 3 成立：

定理 3 当 $\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{div}(I)|_{(x,y)\in L}dl<0(>0)$ 时，L 稳定(不稳定).

1985 年[12]首次证明了上述猜想. 其方法主要是把后继函数分成两部分(正则区域内和奇异区域内)，在奇异区域内用 C^1—Hartman 定理获得系统的局部通积分并利用此通积分获得后继函数，估计这两部分后继函数与无切弧趋于鞍点时的极限性质，最后再把两部分后继函数加以拼接而获得整体后继函数的性质. [12]的工作有以下意义：1. 表明临界情况下分界线环的稳定性不能仅由鞍点的局部性态而要由分界线环本身所包含的全部性态所决定. 2. 提供了一种新的方法，这一方法后来在[17]，[22]，[38]中都表明是有潜力和有效的.

当临界情况同宿环稳定性的判别问题解决后，研究朝着两个不同的方向发展. 第一个方向是探讨第二临界情形即 $\sigma=0,\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{div}(I)|_{(x,y)\in L}dl=0$ 时 L 稳定性的判别. [67]最近证明了这时可用一阶鞍点量 v_1 来决定 L 的稳定性. 但总的来说，这一问题尚未解决，根据现有的结果看，有理由猜想将来的结果可能是类似于高重极限环稳定性的判据的，可参见[7]§2—§4，尤其是[7]，P36，习题 2 对有志于做这一研究的人肯定是重要的. [22]给出了一些实例说明有必要研究更高的临界情形. 第二个方向是研究异宿环的稳定性. 在这方面，1968 年[14]首次证明了下述

定理 4 设异宿环 $s^{(n)}$ 带有初等鞍点 $O_1,O_2,\cdots,O_n$

$$\lambda_i^+>0>\lambda_i^-$$

是系统在 O_i 处的特征值，定义

$$\lambda_i=-\frac{\lambda_i^-}{\lambda_i^+},\ \lambda=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

则当 $\lambda>1(<1)$ 时，$s^{(n)}$ 是稳定(不稳定)的.

当 $n=1$ 时，异宿环退化为同宿环 $s^{(1)}$，而判别法则变成当 $\lambda=-\frac{\lambda^-}{\lambda^+}>1(<1)$ 时 $s^{(1)}$ 是稳定(不稳定)的. 由于 $\sigma=\lambda^++\lambda^-$，因此容易验证

$$\sigma<0(>0)\Leftrightarrow\lambda>1(<1).$$

这说明定理 4 包含了定理 2. [14]结果的意义下不仅是单纯给出了异宿环稳定性的判别法则，

而且还在于转变了研究者的某些表面印象. 在研究同宿环时,σ 这个量起了很重要的作用,有人根据这一印象,在研究异宿环时,仍想用 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 这几个量来确定 $s^{(n)}$ 的稳定性,现在看来,λ_i^+,λ_i^- 是比 σ_i 更本质的量. σ 之所以可以决定 $s^{(1)}$ 的稳定性,只是 $n=1$ 时 σ 恰好与 λ 等价这一偶然性造成的. 当 $\lambda=1$ 时出现了对异宿环的临界情况. 在与作者的通信中,有人曾猜测和 $\left(\int_{s_{12}}+\int_{s_{23}}+\cdots+\int_{s_{n1}}\right)(\mathrm{div}(I))dt$ (其中 s_{ij} 是从鞍点 O_i 到 O_j 的异宿轨)可以决定 $s^{(n)}$ 的稳定性,现在看起来,这仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时才是正确的,是一般情况的一个特例. 但是在不知道结果之前作这一猜测则很容易使研究走偏方向. 联合使用[12],[14],[15]中的方法和估计,[17]得到下面的

定理 5 设 M_{i1},M_{i2} 是 O_i 的稳定流形 s_i^+ 及不稳定流形 s_i^- 上的点使得弧长 $\widehat{O_iM_{i1}}=$ 弧长 $\widehat{O_iM_{i2}}=c_i\rho$,则当 $\lambda>1(<1)$ 或 $\lambda=1$ 而 $A_{n1}<0(>0)$ 时,$s^{(n)}$ 稳定(不稳定). 其中

$$A_{n1}=\lim_{\rho\to 0}(\bar{J}_{n1}+\lambda_n\bar{J}_{n-1,n}+\cdots+\lambda_2\cdots\lambda_n\bar{J}_{12}),$$

$$J_{ij}=\int_{\widehat{M_{i2}M_{j1}}}(\mathrm{div}(I)dt\quad(j=i+1,\text{当 } i=n \text{ 时},j=1).$$

而 c_i 由方程组

$$c_1^{2-\lambda_1}(\lambda_1^+)\cos\varphi_1=c_2(-\lambda_2^-)\cos\varphi_2,$$
$$c_1^{2-\lambda_2}(\lambda_2^+)\cos\varphi_2=c_3(-\lambda_3^-)\cos\varphi_3,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$c_n^{2-\lambda_n}(\lambda_n^+)\cos\varphi_n=c_1(-\lambda_1^-)\cos\varphi_1$$

确定. 其中 $\varphi_i=|90°-\theta_i|$,θ 是 $s_{i-1,i}$ 和 $s_{i,i+1}$ 之间的夹角.

当 $\lambda\neq1$ 时,对应于 $n=1$ 及 $n>1$,定理 5 就成为定理 2,4,当 $\lambda=1,n=1$ 时,定理 5 就成为定理 3,当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时,定理 5 就成为[25]定理 2.1,即上面提到的猜测. 因此[17]的结果包括了[1]-[3],[12],[14],[23]-[25]中关于同宿异宿环稳定性的结果. 定理 5 的特点在于不仅包含了 $\lambda_i^+,\lambda_i^-,\lambda_i$,$\int\mathrm{div}(I)dt$ 这些可以预料到的量,而且还表明判据的形式上的简单明了要依靠无切弧位置之间的特殊比例关系([14]的证明表明,如果不取适当的无切弧的位置比例,判据中将出现 n 重指数式这种复杂的表达方式以致于几乎无法应用). 在判据中出现的积分的收敛性方面,异宿环也出现了新的情况. 引理 1 表明,当 $\sigma=0$ 或 $\lambda=1$ 时,积分 $\int_L\mathrm{div}(I)dt$ 必定收敛. [17]证明,这一性质可以保持到 $n=2$,即当 $\lambda=1$ 时,积分 $\int_{s_{12}}\mathrm{div}(I)dt$ 格 $\int_{s_{21}}\mathrm{div}(I)dt$ 必定收敛,但这时的收敛性已比 $n=1$ 时减弱,是指无切弧在定理 5 所确定的位置比例关系上,在 cauchy 主值意义下的收敛. 当 $n\geqslant3$ 时,即使在这一意义下也不能保证每个单个积分 $\int_{s_{ij}}(\mathrm{div}(I))dt$ 的收敛性,而只能保证它们的一种特殊的线性组合是收敛的. [41]对这一问题的研究作了简单的回顾.

以上定理都假定分界线环或异宿环的参数方程为已知. 但对很多系统我们写不出其分界线环或异宿环的方程. [8].[9],[58]等曾对特殊的系统研究过这种例子. [58]在确定异宿环稳

定性的时候，实际上将其转化为唯一性问题，即证明异宿环内部不存在极限环，从而可由其内部奇点的稳定性确定异宿环的稳定性.

一个还没有完全解决的问题是关于无穷远分界线环的稳定性. 所谓无穷远分界线环，我们是指相平面上一条两端均通往无穷远处的不变曲线. 其稳定性是指它邻近的轨线是向它还是离开它盘旋. [26],[27],[28]研究了一类内部是焦点的二次系统无穷远分界线环的稳定性，[13]研究了内部是中心的无穷远分界线环，[39]研究了无穷远分界线环的 Мельников 函数.

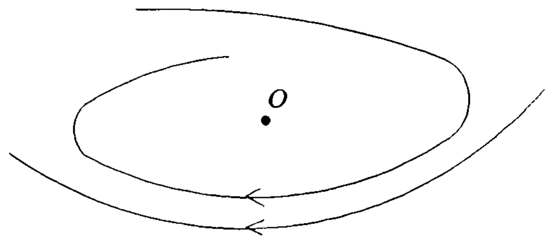


图7. 无穷远分界线环

[26]的方法是求出系统的通积分以确定后继函数. 现有的例子表明，带有无穷远分界线环的系统经常是不含线性项或线性项不起作用的系统，而对有线性项的双曲系统，我们可以使用线性化定理来获得鞍点邻域中的通积分. 然而对于没有线性项的系统就没有类似的定理了，这就是在一般情况下研究无穷远分界线环的困难，看来这一问题涉及到标准型问题的研究并有赖于这方面研究的突破.

关于以上问题以及分支极限环的研究都涉及到系统在鞍点邻域中的标准型问题. 比如[12],[14],[23]都分别使用了 C^1－Hartman 定理，不变流形直化定理及 Joyal 标准形定理才能获得较好的结果. 标准形问题的研究有和微分方程几乎一样长的历史. 这一问题和系统的光滑性，特征根的性质(共振，非共振)以及对变换要求的光滑性都有密切关系.

例如一个用解析变换不可能线性化的系统可能可以 C^1－线性化，在[12],[14]中要求系统是 C^2 的，但[23]就要求系统是 C^3 的等等. 尽管标准形问题的研究已有了很多深刻的结果，但还是有很多问题的条件不是已经弄得很清楚了. 例如有一个很著名的 Poincare－Sternber 定理说如果平面系统的特征根是非共振的，就可将其 C^∞ 线性化. 但是也存在这样的系统，它不满足非共振条件，如系统 $\dot{x}=-y+xy, \dot{y}=x+y^2$ 但是却甚至可用解析变换(如 $u=\frac{x}{1-x}, v=\frac{y}{1-x}$)线性化. 因此线性化的条件究竟是什么这一问题就还是值得继续探讨的. 再比如，刚才提到的没有线性部分的系统，是否能化为某种标准形的问题也是一个可研究的问题. 关于这一问题的研究，可参看[4],[5],[60]－[63],[12],[14],[16],[23],[33],[45].

关于问题Ⅳ.1的研究，[3]－[5],[48],[49],[63]已经探讨得很全面了，可以说几乎包含了所有可能的情况，近年来又有[34],[44],[46],[54],[55]的工作. 但这些讨论中很多仅限于讨论可能性，至于分支出现的条件就没有下文了. 不过确定分支条件的问题恐怕是无法彻底解决的，[49]就已指出，很多分支集不是代数的，即这些问题不可能进行代数判定. 因此我们可以预料有相当的分支条件是难以写出的.

关于Ⅳ.2的研究，早在 1958 年[3]就证明了，如果 $\sigma\neq0$，则分支极限环的稳定性和分界线

环的稳定性是相同的，因而是唯一的，[3]并举出反例，说明当 $\sigma=0$ 时，分界线环可能分支出两个极限环. 因此从[3]发表之后，长时期以来，研究者有一种印象：当 $\sigma=0$ 时不再有唯一性了. 这种印象是如此强烈以至于几乎无人再去思考 $\sigma=0$ 时的唯一性问题了. 而因此 1990 年[22]发表的结果就是颇出人意料的了. [22]证明了当 $\sigma=0$, $\int_L \mathrm{div}(I)dl \neq 0$ 时，分支极限环的稳定性仍然和分界线环的稳定性相同，因而是唯一的. 现在看来，这不是偶然的，因为分支极限环的稳定性是由积分 $\int_\Gamma \mathrm{div} I(\varepsilon)dl$ 决定，而分界线环的稳定性由积分 $\int_L \mathrm{div}(I)dl$ 决定，这两个积分的形式正好相同，而我们又有当 $\varepsilon\to 0$ 时，$I(\varepsilon)\to(I)$，$\Gamma\to L$，因此很可能应该成立 $\int_\Gamma \mathrm{div} I(\varepsilon)dl \to \int_L \mathrm{div}(I)dl$（当 $\varepsilon\to 0$ 时）这就是[22]的主要线索. 现在我们猜测（通过以上的分析以及和焦点量的阶数、Hopf 分支的数目进行类比）当 $\sigma=0$, $\int_L \mathrm{div}(I)dl=0$, $\Lambda_2\neq 0$（Λ_2 是下一个目前尚不知道的关于分界线环的稳定性判定量）时，分支极限环的稳定性将不能再仅由未扰动系统的信息预先确定了，而很可能象 Мельников 判据那样要包含未扰动项和扰动项两部分的信息. [23]—[25]用不同于[22]的另一种方法（所考虑的系统及光滑性也有所不同）得出了分支的唯一性. 目前还难以比较这两种方法的效力，但是就稳定性而言，[25]的结果是弱于[17]的.

在分支极限环数目问题上，Hamilton 系统有特别好的结果. 第一个这方面的结果是[30]在 1951 年发表的，但没有发表证明，以后也未见证明发表. 到 1986 年[53]首次给出了证明，其结果可叙述如下：

考虑系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y + \varepsilon f(x,y), \\ \dot{y} &= -H_x + \varepsilon g(x,y). \end{aligned} \qquad I(\varepsilon)$$

设 L_h 是系统 $I(0)$ 的等高线 $H(x,y)=h$，L_0 是分界线环，$H>0$ 表示 L_0 的内部

$$I(h)=\iint_{H\geqslant h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy,$$

则[53]证明了下述

定理 6 当 h 充分小时，成立展开式

$$I(h)=c_1+c_2 h\ln h+c_3 h+c_4 h^2\ln h+\cdots,$$

其中

$$c_1=I(0),\quad c_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\Big|_{x=y=0},\quad c_3=\frac{\partial}{\partial h}I(h)\Big|_{h=0}.$$

若 $I(h)\neq 0$ 且 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, $c_{n+1}\neq 0$. 则存在 $I(\varepsilon)$ 的一个扰动系统，使得此系统存在 n 个 L_0 邻近的极限环，又 $I(\varepsilon)$ 的任何扰动至多存在 n 个极限环.

都是基于上述定理[20]，[21]证明了二次系统的分界线环至多分支出三个极限环. 但由于上述定理只是一种存在性定理，因此他们并未解决实现问题. [64]首次实现了从二次系统的分界线环分支出二个极限环，最近[43]又实现了从二次系统的分界线环分支出三个极限环.

以上定理中的 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 诸量称为分界线量. 注意对 Hamilton 系统有 $\mathrm{div} I(0)=0$，因此不难验证

$$c_1 = \iint\limits_{h \geq 0} (\operatorname{div} I(\varepsilon)) dx dy,$$
$$c_2 = (\operatorname{div} I(\varepsilon))|_{x=0,y=0} = \sigma(I(\varepsilon)),$$
$$c_3 = \int\limits_{L_0} (\operatorname{div} I(\varepsilon)) dt = \Lambda(I(\varepsilon)).$$

由此看出：c_2,c_3 正好是判断系统 $I(\varepsilon)$分界线环稳定性的量(但实际上 $I(\varepsilon)$中没有分界线环，L_0 是 $I(0)$的分界环)，这是某种巧合还是有某种规律隐含其中尚不清楚. 经查[30]的原文，[30]考虑的系统不仅限于 Hamilton 系统，而有些现象如果只限于 Hamilton 系统可能看不到，因此[30]是一篇值得深入挖掘的文章. 看来还有潜力可发挥. 在分界线量中，有的只和鞍点本身有关，有的则还和分界线环有关. 与此平行，还有一套量称为鞍点量，也有不少研究者在算，见[16]，[18]，[19]，[20]，[21]，[22]，[43]. [43]的结果表明，对某些特殊系统鞍点量可以决定分支数目，[67]的结果表明，有时鞍点量也可决定稳定性. [22]的结果又表明，一般来说，鞍点量的阶数和符号不能决定分界线环的稳定性. 因此鞍点量究竟在同宿环的稳定性及其分支中起了什么作用?鞍点量和焦点量究竟能不能完全平行地看成是两套对偶的量，亦或这仅是一种形式上的对偶，而实质上并不相同? 又鞍点量和分界线量之间有什么关系? 等等都是值得进一步探讨的问题. 最近[66]对从分界线环分支出极限环的个数问题作了进一步的探讨，改正了 Joyal 及 Roussarie 的某些错误，其讨论中也涉及到上述问题.

关于Ⅳ. 4. 上面提到，看来要对每一个分支的可能，给出条件是困难的，但对有些问题，给出这种条件是可能的. 如从分界线环分支出极限环，其可能性早已知道，但直到 1985 年，[12]才给出分支的解析条件. [17]给出了从异宿环分支出极限环的判别条件，[37]对 Hamilton 系统减弱了[17]的条件并给出了分支出同宿，异宿环的条件，[38]对一般系统讨论了从异宿环分支出同宿、异宿环的条件，其结果包括了[37]的结果.

最近并且预测未来，同宿、异宿轨道及其分支的研究有向空间转移的趋势. 在这方面，第一个可值得注意的结果是 Ширников[31]，[32]的下面的

定理 7 考虑系统

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad I(\varepsilon)$$
$$R = \alpha + i\beta,$$

若 (1) $|R_e w| < \lambda, \beta \neq 0$； (2) $I(\varepsilon)$存在一条 homoclinic 轨道(与 $O(0,0;0)$相连)γ. 则存在 $I(\varepsilon)$的一个扰动系统，使它存在一条 γ 邻近的 homoclinic 轨 γ'，且 γ'的 return map 包含可数多个马蹄(见图 8).

[33]又深入地研究了 Silnikov 问题，[42]将[12]的结果推广到了三维并在[51]，[52]中研究了三维同宿轨的分支问题. [44]也是关于三维同宿轨问题的一篇比较详细的资料. [67]的作者最近也在 3 维空间同宿轨的研究上有了新的进展，他们的结果表明，尽管高维情况的研究要增加相当的难度和出现一些新的现象，但很多结果仍是二维相应结果的推广和发展，因此二维情况的研究既可为高维情况的研究提供推广的原型，也可为这种研究提供有价值的思想和方法. 总之，这方面的研究正方兴未艾，并经常与混沌等问题的研究联系起来.

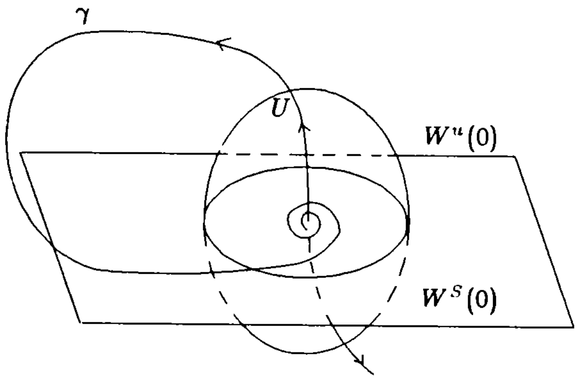


图 8　R^3 中的一种同宿轨(Silnikov 型)

作者感谢张芷芬教授对作者的十分有价值的指点及鼓励.

参　考　文　献

[1] H. Dualc, Bull. Sol, Math., 51(1923).

[2] A. A. Андронов, Леонтович, etc, Качественная Теория Динамических Систем Второго Порядка, Наука Москва, 1966.

[3] A. A. Andronov, E. A. Leantovich, etc, *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Wiley, New York, 1973.

[4] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer—Verlag, New York, 1983.

[5] Shui-Nee Chow and Jack K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer—Verlag, New York, 1982.

[6] John Guckenheimer, Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer—Verlag, New York, 1983.

[7] 叶彦谦, 极限环论, 上海科学技术出版社, 上海, 1984.

[8] 王现, $\ddot{x}+(\alpha_1+3\alpha_3x^2)\dot{x}-\beta_1x+\beta_3x^3$ 的大范围分析, 应用数学, 2(1990):59—64.

[9] 孙建华, 二次系统(Ⅲ)$_{\delta=-n}$的极限环之唯一性问题, 科学通报, 12(1990):887—890.

[10] J. W. Reyn, *Generating of limit cycles from separatrix polygons in the phase plane*, Lecture Notes in Math., 810: 264—289.

[11] В. К. Мельников, Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях, Труды Московского Математического Общества, 12(1963), 1—57.

[12] 冯贝叶, 钱敏, 鞍点分界线圈的稳定性及其分支出极限环的条件, 数学学报, 28(1985), 1:53—70.

[13] Feng Beiye, *Condition for generating limit cycles by bifurcation of the loop of a saddle—point separatrix*, ACTA. Math. SINICA, New series, 3(1987), 4:373—382.

[14] Л. А. Черкас, Об устойчивости осодых циклон, Диф. Урав., 4(1968), 1012—1017.

[15] 马知恩, 汪儿年, 鞍点分界线环的稳定性及产生极限环的条件, 数学年刊, 4A(1983), 1:105—110.

[16] Pierre Joyal and Christiane Rousseau, *Saddle quantities and applications*, J. D. E, 18(1989), 374—399.

[17] 冯贝叶, 临界情况下奇环的稳定性, 数学学报, 33(1990), 1:113—134.

[18] 秦朝斌, 秦元勋, 一类鞍点量的计算, 科学通报, 32(1987), 24:1841—1843.

[19] 刘一戎，李继彬，论复自治系统的奇点量，中国科学，A3(1989)：245—250.
[20] 蔡燧林，郭光远，鞍点量与二次系统的分界线环产生极限环（预印本）.
[21] Zhu Deming, *Saddle—value and integrability condition of quadratic differential systems*, Chin. Ann. of Math 8B (1987), 4:466:478.
[22] 罗定军，朱德明，分界线环的稳定性和分支极限环的唯一性，数学年刊，11A(1990)，1:95—103.
[23] 罗定军，韩茂安，朱德明，奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅰ)(预印本).
[24] 韩茂安，罗定军，朱德明，奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅱ)(预印本).
[25] 韩茂安，罗定军，朱德明，奇闭轨分支出极限环的唯一性(Ⅲ)(预印本).
[26] Л. А. Черкас, Диф. Урав, 3(1967), 7:1060—1069.
[27] 周孔容，关于 Л. А. Черкас 的一个结果的修正和补充，四川大学学报，2(1980)，23—37.
[28] C. A. Holmes, *Some quadratic systems with a separatrix cycles surrounding a limit cycle*, preprint.
[29] B. Aulbach and D. Flockerzi, *The past in short hypercycles*, J. Math. Biol, 27(1989):223—231.
[30] Е. Леонтович, О рождении предельных циклов от сепаратрисы, Доклады Академии Наук, СССР, LXXVII, 4:641—645.
[31] Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Матe. Сборник, 88(130)(1972), 4:475—492.
[32] Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Матe. Сборник, 90(132)(1973), 1:140—156.
[33] Bo Deng, *The silnikov problem, exponential expansion, strong λ—lemma, c^1—linearization and homoclinic bifurcation*, J. D. E, 79(1989):189—231.
[34] Chenzhi Li and Christiane Rousseau, Can. J. Math., Vol. XLII. No. 2(1990), 191—212.
[35] Daniel Stoffer, Z. A. M. P. Vol. 34(1983):948—952.
[36] H. Kokubu, Japan J. of Appl Math, Vol. 5, No. 3(1980):455—501.
[37] 李宝毅，Hamilton 系统在自治小扰动下的奇异环的分岐现象(预印本).
[38] 冯贝叶，肖冬梅，Heteroclinic 环的 Heteroclinic 环及 Homoclinic 环分支，数学学报，35(1992)，6:815—830.
[39] 冯贝叶，无穷远分界线环的 Мельников 判据及二次系统极限环的分布，应用数学学报，16(1993)，4：452—492.
[40] 袁晓凤，二阶 Мельников 函数及其应用(预印本).
[41] Feng Beiye, *The stability of a geteroclinic cycle for the critical case*, Scientia Sinica, 34A(1991), 8:920—934.
[42] 孙建华，具有非双曲奇点的高维系统的分支(预印本).
[43] 刘一戎，E_n 的奇点量与几类分支问题(预印本).
[44] H. Kokubu, Y. Nighiura and H. Oka, *Heteroclinic and homoclinic bifurcation in bistable reaction diffusion systems*, J. D. E, 86(1990)：260—341.
[45] S. Van Strien, *Smooth linearization of hyperbolic fixed point without resonance condition*, J. D. E, 85(1990)：66—90.
[46] Pierre Joyal, *The cusp of order N*, J. D. E, 99(1990)：1—14.
[47] G. Wolansky, *Limit theorem for a dynamical system in the presence of resonances and homoclinic orbits*, J. D. E, 83(1990)：300—335.
[48] J. Sotomayor, *Curvas Definidas for equagoes diferencials no plano*, Instituo de Matematica Pura e Aplicada, 1981(有中译本，微分方程在平面上定义的曲线，科学出版社，1989).
[49] Ю. С. Ильяшенко，实平面与复平面上微分方程的奇点与极限环(作为附录收入"微分方程在平面上定义的曲线"中文版).

[50] 孙建华，超临界情形的鞍点分界线环分支，数学年刊，12A:5(1991)，636—643.
[51] Shun Jianhua, *On the three dimensional homoclinic systems*(I) ,preprint.
[52] Shun Jianhua, *On the three dimensional homoclinic systems*(II), preprint.
[53] R. Roussaric, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Bras Mat., 17(1986), 67—101.
[54] J. Guckenheimer, R. Rand, D. Schlomiuk, *Degenerate Homoclinic Cycles in Perturbations of Quadratic Hamiltonian Systems*, preprint.
[55] F. Dumortier, R. Roussaric, J. Sotomayor, *Generic 3—parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part, The cusp case of codimension 3*, preprint.
[56] 周毓荣，非线性振动方程极限环的存在性，应用数学学报，3:1(1980)，50—56.
[57] 余澍祥，证明极限环存在与唯一性 Хилинное 的方法，数学学报，14:3(1964)，461—470.
[58] 张平光，一类二次系统二点环 $s^{(2)}$ 的稳定性，数学年刊，11A:3(1990)，361—365.
[59] 沈伯骞，二次系统的三次曲线极限环和分界线环的存在性问题，数学年刊，12A:(1991)，382—389.
[60] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Boston; Basel; Stutgart; Birkhäuser, 1982.
[61] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice—Hall, 1964.
[62] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, Inc., London, 1980.
[63] J. Palis, Jr, Welington de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer—Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
[64] Christeane Rousseau, *Example of a quadratic system with two cycles appearing in a homoclinic loop bifurcation*, J. D. E. 66(1987), 140—150
[65] 戴国仁，冷忠建，E_3 系统的分界线环与积分直线，四川大学学报，24:4(1987)，367—375.
[66] 韩茂安，分界线环分支出极限环的个数，预印本.
[67] Zhu Deming, *Homoclinic Bifurcation with Codimension 3*. 预印本.
[68] P. Joyal, *Generalized Hopf bifurcation and its dual generalized homoclinic bifurcation*, SIAM. J. Appl. Math, 48 (1988), 481—496.

Survey of the Current Research on Homoclinic Orbits and Heteroclinic Orbits

Feng Beiye

(Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The bifurcation near a homoclinc orbit or a heteroclinic orbit has been interesting the mathematicians in recent years. This paper surveys the recent advance in the research on this topic from four aspects; I. the existence of the homoclinic orbits and the heteroclinc orbits; II. the stability of a homoclinc cycle or a heteroclinic cycle; III. the mutual position between the stable manifold and the unstable manifold of a saddle point; IV. the bifurcation of a homoclinc orbit or a heteroclinic orbit. We especially survey some important results obtained by Russian and Chinese mathematicians. Some research dircections and problems are suggested for further study.