第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

概率分布函数序列弱收敛的一个充分条件*

陈 俊 雅
(天津师范大学数学系,300074)

设 $F,F_1,F_2,\cdots$ 均为概率分布函数,它们的 k 阶矩分别为 $m^{(k)},m_1^{(k)},m_2^{(k)},\cdots$. 文献[1]中给出了下述结果:如果上述每个概率分布函数的各阶矩均有限,且满足:1) $\lim\limits_{n\to\infty}m_n^{(k)}=m^{(k)},k=0,1,2,\cdots$; 2) $\forall\ t\in R$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}m^{(n)}\dfrac{t^n}{n!}=0$,则 $F_n\xrightarrow{w}F$. 本文改进了这一充分条件,得到了下面的定理.

定理 设 $F,F_1,F_2,\cdots$ 均为概率分布函数,它们的 k 阶矩分别为 $m^{(k)},m_1^{(k)},m_2^{(k)},\cdots$. 如果上述每一个概率分布函数的各阶矩均有限,且满足:1) $\lim\limits_{n\to\infty}m_n^{(k)}=m^{(k)}$, $k=0,1,2,\cdots$; 2) $\exists$ 某一个 $t_0>0$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}m^{(n)}\dfrac{t_0^n}{n!}=0$. 则 $F_n\xrightarrow{w}F$.

证明 由 2)可证 $\forall\ 0<t_1<t_0$,级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}m^{(k)}((it)^k/k!)$ 在 $t=t_1$ 点绝对收敛,所以 F 是具有矩 $m^{(k)}$, $k=0,1,2,\cdots$的唯一概率分布函数(见[2]中15.4).

若 $F_n\xrightarrow{w}F$ 不成立,则 $\exists\ x_0\in C(F)$ 使 $F_n(x_0)\nrightarrow F(x_0)$,因而存在 $\{F_n(x_0)\}$ 的子列 $\{F_{n_l}(x_0)\}$ 满足 $F_{n_l}(x_0)\to M\neq F(x_0)$. 再利用弱紧致定理,可得 $\{F_{n_l}\}$ 的一个子列 $\{F_{n_{l_j}}\}$ 和一个分布函数 G 使 $F_{n_{l_j}}\xrightarrow{w}G$. 设 $\mu_n^{(k)}$ 为 F_n 的 k 阶绝对矩,则 $\forall\ k\geqslant 0$ 有 $\lim\limits_{j\to\infty}\mu_{n_{l_j}}^{(2k)}=\lim\limits_{j\to\infty}m_{n_{l_j}}^{(2k)}=\lim\limits_{n\to\infty}m_n^{(2k)}=m^{(2k)}<\infty$,所以 $\{\mu m_{n_{l_j}}^{(2k)}\}$ 有界,故 x^k 对 $\{F_{n_{l_j}}\}$ 一致可积. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty}m_{n_{l_j}}^{(k)}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF_{n_{l_j}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dG(x) \tag{1}$$

另一方面,由(1)又有

$$\lim_{n\to\infty}m_{n_{l_j}}^{(k)}=\lim m_n^{(k)}=m^{(k)}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x). \tag{2}$$

由(1)易知 G 也是一个概率分布函数. 根据(1),(2),概率分布函数 F 和 G 的各同阶矩都相等. 利用上面已证得的结果便知 $F=G$. 所以 $F(x_0)=G(x_0)=\lim\limits_{j\to\infty}F_{n_{l_j}}(x_0)=\lim\limits_{l\to\infty}F_{n_l}(x_0)=M$. 这就产生了矛盾,所以 $F_n\xrightarrow{w}F$.

参 考 文 献

[1] K. L. Chnng, *A course in Probability Theory*, 2th edition, Academic Press, 1974.
[2] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.

* 1991年10月13日收到.