第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

关于度量加的一个定理及一个矩阵不等式*

苏 化 明
(合肥工业大学数学力学系,230009)

§1 关于度量加的一个定理

R. Alexander 在[1]中曾提出如下猜想:

设两个单形的顶点分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_{n+1}$ 和 $p_1',p_2',\cdots,p_{n+1}'$;构作第三个单形 $p_1'',p_2'',\cdots,p_{n+1}''$,使得 $|p_i''-p_j''|^2=\frac{1}{2}[|p_i-p_j|^2+|p_i'-p_j'|^2]$ $(i,j=1,2,\cdots,n+1)$,则应当有不等式

$$V''^2\geqslant\frac{1}{2}[V^2+V'^2],\tag{1.1}$$

这里 V,V',V'' 依次表示三个单形的体积.

杨路、张景中在[2]中对这个猜想给出了否定的回答.同时证明了:

定理 1.1 设 $\Sigma_A,\Sigma_B,\Sigma_C$ 是 E^n 中的单形,又令 a_{ij},b_{ij},c_{ij} $(i,j=0,1,\cdots,n)$, V_A,V_B,V_C 分别表示它们的棱长及体积,如果 $c_{ij}^2=a_{ij}^2+b_{ij}^2$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$,则有

$$V_C^{\frac{2}{n}}\geqslant V_A^{\frac{2}{n}}+V_B^{\frac{2}{n}},\tag{1.2}$$

式中等号成立的充分必要条件是这些单形两两相似.

上述从两个 n 维单形构作第三个单形的运算叫做"度量加",度量加法可应用于某些几何不等式的证明[1].本文进一步讨论了这种度量加问题,得到如下的

定理 1.2 设 $\Sigma_A:A_0A_1\cdots A_n$, $\Sigma_B:B_0B_1\cdots B_n$ 为 n 维欧氏空间 $E^n(n\geqslant2)$ 中的两个单形,它们的棱长和体积分别为 $\overline{A_iA_j}=a_{ij}$, $\overline{B_iB_j}=b_{ij}$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$ 和 V_A,V_B,令

$$c_{ij}^2=a_{ij}^2+b_{ij}^2\quad(i,j=0,1,\cdots,n),\tag{1.3}$$

且 Σ_A,Σ_B 的 $n+1$ 个侧面 $F_A^{(i)},F_B^{(i)}$ 上的高分别为 $h_A^{(i)},h_B^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,n)$,则有

1° 以 c_{ij} 为棱可以组成 E^n 中的 n 维单形 $\Sigma_C:C_0C_1\cdots C_n$,使 $\overline{C_iC_j}=c_{ij}$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$.单形 Σ_C 的体积记为 V_C,Σ_C 的 $n+1$ 个侧面 $F_C^{(i)}$ 上的高记为 $h_C^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

2°

$$(h_C^{(i)})^2\geqslant(h_A^{(i)})^2+(h_B^{(i)})^2\quad(i=0,1,\cdots n),\tag{1.4}$$

式中等号成立的充分必要条件为单形 Σ_A 与 Σ_B 相似.

3°[2]

$$V_C^{\frac{2}{n}}\geqslant V_A^{\frac{2}{n}}+V_B^{\frac{2}{n}},\tag{1.2}$$

* 1991年3月9日收到.

式中等号成立的充分必要条件为单形 Σ_A 与 Σ_B 相似.

4°

$$V_C^2 \geqslant 2^n V_A V_B, \tag{1.5}$$

式中等号成立的充分必要条件为单形 Σ_A 与 Σ_B 全等.

为了证明定理 1.2,我们需要以下几个引理.

引理 1.1 $\binom{n+1}{2}$个正数 $p_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n,\ p_{ij}=p_{ji},\ p_{ii}=0)$为欧氏空间 $E^n(n\geqslant 2)$的某 n 维单形所有可能的顶点(即不位于一个 $n-1$ 维线性流型内的 $n+1$ 个点的组)对的距离的充分必要条件为实对称矩阵$(\rho_{ij})_{n\times n}$正定,其中 $\rho_{ij}=p_{i0}^2+p_{j0}^2-p_{ij}^2\ (i,j=1,2,\cdots,n.\ p_{ij}=p_{ji},\ p_{ii}=0)$.

引理 1.2[4] 设 n 维单形的棱长为 $p_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n,i\neq j)$,体积为 V,则

$$V=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}D_{n+2}, \tag{1.6}$$

其中 D_{n+2} 为 $n+2$ 阶 Cayley—Menger 行列式:

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & p_{ij}^2 & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \quad (i,j=0,1,\cdots,n,p_{ij}=p_{ji},p_{ii}=0).$$

引理 1.3[5] (Bergstrom 不等式) 设 R,S 为实对称正定矩阵,R_i,S_i 分别为 R,S 删去第 i 行、第 i 列后所得的子矩阵,$|R|$表示 R 的行列式,则

$$\frac{|R+S|}{|R_i+S_i|}\geqslant\frac{|R|}{|R_i|}+\frac{|S|}{|S_i|}, \tag{1.7}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=\mu S(\mu>0$ 为常数).

§2 一个矩阵不等式

我们前面对不等式(1.2)的证明主要依赖于矩阵不等式(1.7),而杨路、张景中在[2]中对(1.2)的证明是利用了某些代数上的技巧,故从[2]可以启发我们提出下面关于实对称正定矩阵的一个不等式.

定理 2.1 设 R,S 均为 n 阶实对称正定矩阵,用$|R_k|_i$表示 R 的 k 阶子式,$|S_{n-k}|_i$表示 S 的与$|R_k|_i$相对应的 $n-k$ 阶代数余子式,则有

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}}|R_k|_i|S_{n-k}|_i\geqslant\binom{n}{k}|R|^{\frac{k}{n}}|S|^{\frac{n-k}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n-1), \tag{2.1}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=\mu S(\mu>0$ 为常数).

注 若约定$|R_0|=1$,则当 $k=0$ 或 $k=n$ 时(2.1)显然为等式.

由定理 2.1,我们可得

推论 2.1 设 R,S 为 n 阶实对称正定矩阵,α,β 为正常数,则有

$$|\alpha R+\beta S|^{\frac{1}{n}}\geqslant\alpha|R|^{\frac{1}{n}}+\beta|S|^{\frac{1}{n}}, \tag{2.2}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=\tau S(\tau>0$ 为常数).

推论 2.2 (Minkowski 不等式[5]) 设 R,S 为 n 阶实对称正定矩阵,则有

$$|R+S|^{\frac{1}{n}} \geqslant |R|^{\frac{1}{n}} + |S|^{\frac{1}{n}}, \tag{2.3}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=\mu S(\mu>0$ 为常数).

注 显然不等式(2.3)和(2.2)是等价的.

推论 2.3 (Ky Fan 不等式[5]) 设 R,S 为实对称正定矩阵,对于 $0<\alpha<1$,有

$$|\alpha R+(1-\alpha)S| \geqslant |R|^{\alpha}|S|^{1-\alpha}, \tag{2.4}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=S$(当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$ 时,(2.4)显然为等式).

推论 2.4[9] 设 $\Sigma_A,\Sigma_B,\Sigma_C$ 是 E^n 中的单形,又令 $a_{ij},b_{ij},c_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$ 及 V_A,V_B,V_C 分别表示它们的棱长及体积,如果 $c_{ij}^2=a_{ij}^2+b_{ij}^2\quad(i,j=0,1,\cdots,n)$. 则有

$$\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} \geqslant V_A^{\frac{2\alpha}{n}}V_B^{\frac{2\beta}{n}}, \tag{2.5}$$

其中 $0<\alpha,\beta<1$,且 $\alpha+\beta=1$,而等号成立的充分必要条件是单形 Σ_A 与 Σ_B 是以 $\alpha^{\frac{1}{2}}:\beta^{\frac{1}{2}}$ 为相似比而相似的两个单形.

推论 2.5[10] 设 A_i 为 n 阶实对称正定矩阵,则对于所有的 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,m,m\geqslant 2)$,有

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\lambda_i A_i\right|^{\frac{1}{n}} \geqslant \sum_{i=0}^{m}\lambda_i|A_i|^{\frac{1}{n}}, \tag{2.6}$$

式中等号成立的充分必要条件为任意两个矩阵 A_i,A_j 相差一个整数倍$(i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j)$.

推论 2.6[11] 设 R,S 为 n 阶实对称正定矩阵,则有

$$|R+S| \geqslant |R+S| + (2^n-2)(|R||S|)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

式中等号成立的充分必要条件为 $R=S$.

参 考 文 献

[1] R. Alexander, *The Geometry of Metric and Linear Space*, Springer-Verlag, 1975, 57-65.

[2] 杨路、张景中, 关于 Alexander 的一个猜想, 科学通报, 27(1982), 1:1-3.

[3] И. В. 普罗斯库烈柯夫著, 周晓钟译, 线性代数习题集, 人民教育出版社, 1981 年第一版, 226, 432-433.

[4] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, 2nd. ed, New York, 1970.

[5] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, 1961, 67,70,63.

[6] A. Oppenheim, *Advanced Problems* 5092, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 444.

[7] G. H. 哈代等著, 越民义译, 不等式, 科学出版社, 1965, 53.

[8] 谢邦杰, 线性代数, 人民教育出版社, 1978 年第一版, 86.

[9] 毛其吉, 有关"度量加"的一个不等式, 数学杂志, 8(1988), 2:129-134.

[10] 方献亚, 正定实对称矩阵的几个不等式, 数学通报, 1985, 3:31-32.

[11] 倪国熙, 常用的矩阵理论和方法, 上海科学技术出版社, 1984 年第一版, 169.

A Theorem on Matrix Addition and a Matrix Inequality

Su Huaming

(Hefei Polytechnical University)

Abstract

The main results are two theorems as follows

Theorem 1 *Let* $\sum_A : A_0A_1\cdots A_n$ *and* $\sum_B : B_0B_1\cdots B_n$ *be two simplices in n-dimension Euclidean space* E^n $(n \geq 2)$, *their edge-lengths, volumes be resp.* $\overline{A_iA_j} = a_{ij}, \overline{B_iB_j}$ b_{ij} $(i,j = 0,1,\ldots,n), V_A, V_B$, *and their heights be resp.* $h_A^{(i)}, h_B^{(i)}$ *correspomding to the* $n+1$ *sidefaces* $F_A^{(i)}, F_B^{(i)}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Define $C_{ij}^2 = a_{ij}^2 + b_{ij}^2$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$. *Then*

1. *An n-dimensional simples* $\sum_C : C_0C_1\cdots C_n$ *can be constructed with edge-lengths* $\overline{C_iC_j} = c_{ij}$. *Let* $V_c, h_c^{(i)}$ *be the volume and heights corresponding to the sidefaces* $F_c^{(i)}$ *of* $\sum_C$ $(i = 0,1,\ldots,n)$.

2. $(h_C^{(i)})^2 \geq (h_A^{(i)})^2(h_B^{(i)})^2$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, *(1)*
equality occurrs if and only if $\sum_A$ *and* $\sum_B$ *are similar.*

3. $V_C^{\frac{2}{n}} \geq V_A^{\frac{2}{n}} + V_B^{\frac{2}{n}}$ *(2)*
with equality if and only if $\sum_A$ *and* $\sum_B$ *are similar.*

4. $V_C^2 \geq 2^n V_A V_B$
with equality if and only if $\sum_A$ *and* $\sum_B$ *are congruent.*

Theorem 2 *Let R and S be real symmetric positive definite matrices of order n. Let* $|R_k|_i$ *denote the subdeterminant of order K of R, and* $|S_{n-k}|_I$ *denote the algebraic complement of order* $n-k$ *of S corresponding to* $|R_k|_i$. *Then*

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} |R_k|_i |S_{n-k}|_i \geq \binom{n}{k} |R|^{\frac{k}{n}} |S|^{\frac{n-k}{n}} \tag{4}$$

Equality holds if and only if $R = \mu S$, *where* μ *is a positive constant.*