Banach 空间中集值测度的表示定理*

吴从炘　　薛小平
(哈尔滨工业大学数学系，150001)

摘　要　本文在可分自反 Banach 空间的情形下，给出了任何一列两两等比、一致有界的矢值测度可以生成一个有界闭凸值集值测度的所谓表示定理，而这个定理对 R^n 空间首先在[3]中建立. 同时，找到了由一列两两等比、一致有界变差矢值测度所生成集值测度与这列矢值测度 Radon-Nikodym 导数之间的关系.

关键词　集值测度，有界变差，支撑函数，单值选择.

设 X 是可分自反实 Banach 空间，X^* 是 X 的共轭空间，(Ω,Σ) 是一个可测空间.

一个集值集函数 $M:\Sigma\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 称为集值测度[2]，若满足(i) $M(\varnothing)=\{0\}$；(ii) $M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)$，这里 $\{A_n\}$ 是 Σ 中两两不交集列，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)=\{x\in X:\ x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n(\text{无条件收敛}),x_n\in M(A_n),n\geqslant 1\}.$$

集值测度 $M:\Sigma\to 2^X\setminus\{\varphi\}$ 称为有界变差的[2]，如果 $|M|(\Omega)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}|M(A)|<\infty$，此处 π 是 Ω 的有限 Σ-分划，$|M(A)|=\sup_{x\in M(A)}\|x\|$.

设 (Ω,Σ,μ) 是有限测度空间，$F:\Omega\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$. 记 $S_F=\{\sigma(\omega):\sigma(\omega)\in F(\omega)\ \mu-\text{a. e},\sigma(\omega)$ 是 Bochner 可积函数$\}$，对每个 $E\in\Sigma$，F 的 Aumann 积分[4]定义为 $\int_E Fd\mu=\{\int_E\sigma d\mu:\ \sigma\in S_F\}$，这里 $\int_E\sigma\mu$ 表示 $\sigma(\omega)$ 在 E 上的 Bochner 积分.

矢值测度 $P,Q:\Sigma\to X$ 称为等比的[3]，如果 $A,B\in\Sigma,A\cap B=\varnothing$，则或 $P(A)=Q(A)$，或 $P(B)=Q(B)$，或存在常数 $C(A,B)>0$，满足 $P(A)-Q(A)=C(A,B)(P(B)-Q(B))$.

设 $A\subset X$，则对 $x^*\in X^*$，A 的支撑函数表示为 $\sigma_A(x^*)=\sup_{x\in A}\langle x^*,x\rangle$.

引理 1　设 $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一列从 (Ω,Σ) 到 X 的两两等比矢值测度，则集值集函数 $M(A)=\overline{\text{co}}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$ 是有限可加的，即对任意 $A,B\in\Sigma,A\cap B=\varnothing$，成立 $M(A\cup B)=M(A)+M(B)$.

证明　仅需证 $M(A)+M(B)\subset M(A\cup B)$. 设 $x\in\overline{\text{co}}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$，$y\in\text{co}\{P_m(B)\}_{m=1}^{\infty}$，于是可写成 $x=\sum_{i=1}^{k}a_iP_{m_i}(A)$，$y=\sum_{j=1}^{r}\beta_jP_{n_j}(B)$，这里 $a_i,\beta_j\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant r)$，$\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{j=1}^{r}\beta_j=$

* 1991年9月29日收到. 本文得到博士点基金资助.

1．故 $x+y=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i P_{m_i}(A)+\sum_{j=1}^{r}\beta_j P_{n_j}(B)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\beta_j(P_{m_i}(A)+P_{n_j}(B))$．因 P_{m_i} 与 P_{n_j} 等比，如果 $P_{m_i}(A)=P_{n_j}(A)$ 或 $P_{m_i}(B)=P_{n_j}(B)$，则

$$P_{m_i}(A)+P_{n_j}(B)=P_{n_j}(A\cup B)\in \mathrm{co}\{P_m(A\cup B)\}_{m=1}^{\infty},$$

$$P_{m_i}(A)+P_{n_j}(B)=P_{m_i}(A\cup B)\in \mathrm{co}\{P_m(A\cup B)\}_{m=1}^{\infty};$$

如果存在 $C(A,B)>0$，使得

$$P_{m_i}(A)-P_{n_j}(A)=C(A,B)(P_{m_i}(B)-P_{n_j}(B)).$$

令 $C(A,B)=\frac{1-\delta}{\delta}$ $(0<\delta<1)$，那么

$$P_{m_i}(A)+P_{n_j}(B)=\delta P_{n_j}(A\cup B)+(1-\delta)P_{m_i}(A\cup B)\in \mathrm{co}\{P_m(A\cup B)\}_{m=1}^{\infty}.$$

所以 $x+y\in\mathrm{co}\{P_m(A\cup B)\}_{m=1}^{\infty}$．由此可见

$$\mathrm{co}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}+\mathrm{co}\{P_m(B)\}_{m=1}^{\infty}\subset \mathrm{co}\{P_m(A\cup B)\}_{m=1}^{\infty}.$$

更进一步有 $M(A)+M(B)\subset\overline{\mathrm{co}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}+\mathrm{co}\{P_m(B)\}_{m=1}^{\infty}}\subset M(A\cup B)$.

引理 2 设 $M:\Sigma\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 是有限可加有界的集值集函数，则对每个 $x^*\in X^*$，成立

$$|x^*M|(\Omega)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}|x^*M(A)|<\infty,$$

这里 π 指 Ω 的有限 Σ-分划．

证明 设 $\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 Ω 的任一 Σ-分划，记 $I_1=\{i\leqslant n:\sup\limits_{x\in M(A_i)}\langle x^*,x\rangle=|x^*M(A_i)|\}$，$I_2=\{1,2,\cdots,n\}\setminus I_1$．由 M 的有限可加性得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x^*M(A_i)|&=|\sum_{i\in I_1}\sup_{x\in M(A_i)}\langle x^*,x\rangle|+|\sum_{i\in I_2}\sup_{x\in M(A_i)}\langle -x^*,x\rangle|\\&=|\sum_{i\in I_1}\sigma_{M(A_i)}(x^*)|+|\sum_{i\in I_2}\sigma_{M(A_i)}(-x^*)|\\&=|\sigma_{M(\bigcup_{i\in I_1}A_i)}(x^*)|+|\sigma_{M(\bigcup_{i\in I_2}A_i)}(-x^*)|\leqslant 2\sup_{A\in\Sigma}|M(A)|\,\|x^*\|,\end{aligned}$$

那么从 M 的有界性知结论成立．

由引理 2 可知，若 $\{A_n\}$ 是 Σ 的不交集列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\infty$．

下面的定理 1 是张文修等人在[3]中对有限维空间的情形首先得到，他们的证明关键依赖于有穷维的特点．

定理 1 设 $\{P_m\}$ 是一列从 Σ 到 X 的一致有界且两两等比的矢值测度，则 $M(A)=\overline{\mathrm{co}}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$ 是有界闭凸值集值测度．

证明 首先证对每个 $x^*\in X^*$，$\sigma_{M(A)}(x^*)$ 是实值测度．设 $\{A_n\}$ 是 Σ 的两两不交集列，σ 是 N 到 N 的可重复排列（N 表示自然数集），那么对任何自然数 k 成立

$$\sum_{n=1}^{k}\langle x^*,P_{\sigma(n)}(A_n)\rangle\leqslant\sup_{m=1,2,\cdots}\langle x^*,P_m(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)\rangle. \tag{1}$$

显然仅须验证 $\sum\limits_{n=1}^{k}P_{\sigma(n)}(A_n)\in\mathrm{co}\{P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n)\}_{m=1}^{\infty}$，为此对 k 进行归纳证明．当 $k=2$ 时，因 $P_{\sigma(1)}$ 与 $P_{\sigma(2)}$ 等比，所以

(i) 当 $P_{\sigma(1)}(A_1)=P_{\sigma(2)}(A_2)$ 或 $P_{\sigma(2)}(A_1)=P_{\sigma(1)}(A_2)$ 时，显然结论成立；

(ii) 当存在 $C(A_1,A_2)>0$ 使 $P_{\sigma(1)}(A_1)-P_{\sigma(2)}(A_1)=[P_{\sigma(1)}(A_2)-P_{\sigma(2)}(A_2)]C(A_1,A_2)$时，令 $C(A_1,A_2)=\frac{1-\delta}{\delta}(0<\delta<1)$，有

$$P_{\sigma(1)}(A_1)+P_{\sigma(2)}(A_2)=(1-\delta)P_{\sigma(1)}(A_1\cup A_2)+\delta P_{\sigma(2)}(A_1\cup A_2)\in \mathrm{co}\{P_m(A_1\cup A_2)\}_{m=1}^{\infty}.$$

假定对 $k-1$ 时成立 $\sum\limits_{n=1}^{k-1}P_{\sigma(n)}(A_n)\in \mathrm{co}\{P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{k-1}A_n)\}_{m=1}^{\infty}$，于是有正数 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{r}\delta_n=1$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{k-1}P_{\sigma(n)}(A_n)=\sum\limits_{n=1}^{r}\delta_nP_{m_n}(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}A_j)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{k}P_{\sigma(n)}(A_n)=\sum\limits_{n=1}^{r}\delta_n(P_{m_n}(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}A_j)+P_{\sigma(k)}(A_k))$. 利用 $k=2$ 的情形知 $P_{m_n}(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}A_j)+P_{\sigma(k)}(A_k)\in \mathrm{co}\{P_m(\bigcup\limits_{j=1}^{k}A_j)\}_{m=1}^{\infty}$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{k}P_{\sigma(k)}(A_n)\in \mathrm{co}\{P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n)\}_{m=1}^{\infty}$，即(1)成立. 对任意 $\varepsilon>0$，可取自然数集 N 的一个可重复排列 $\sigma(n)$，使得

$$\sup_{m=1,2,\cdots}\langle x^*,P_m(A_n)\rangle<\langle x^*,P_{\sigma(n)}(A_n)\rangle+\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2}$$

由引理 1,2 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x^*M(A_n)|$ 收敛，于是有自然数 k_0，成立 $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\varepsilon$. 利用(1)，(2)得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sup_m\langle x^*,P_m(A_n)\rangle &\leqslant \sum_{n=1}^{k_0}\langle x^*,P_{\sigma(n)}(A_n)\rangle+\varepsilon+\sum_{n=k_0+1}^{\infty}|x^*M(A_n)| \\ &\leqslant \sup_{m=1,2,\cdots}\langle x^*,P_m(\bigcup_{n=1}^{k_0}A_n)\rangle+2\varepsilon. \end{aligned}\tag{3}$$

从 M 的有限可加性知 $\sup\limits_m\langle x^*,P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\rangle=\sup\limits_m\langle x^*,P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{k_0}A_n)\rangle+\sup\limits_m\langle x^*,P_m(\bigcup\limits_{n=k_0+1}^{\infty}A_n)\rangle$，又因

$$\sup_m\langle x^*,P_m(\bigcup_{n=k_0+1}^{\infty}A_n)\rangle\leqslant\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\sup_m\langle x^*,P_m(A_n)\rangle\leqslant\sum_{n=k_0+1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\varepsilon,$$

于是由(3)得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sup\limits_{m=1,2,\cdots}\langle x^*,P_m(A_n)\rangle\leqslant\sup\limits_{m=1,2,\cdots}\langle x^*,P_m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\rangle+3\varepsilon.$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_{M(A_n)}(x^*)\leqslant\sigma_{M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)}(x^*)$. 而 $\sigma_{M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)}(x^*)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_{M(A_n)}(x^*)$，所以 $\sigma_{M(A)}(x^*)$是实值测度. 最后来证 $M(A)$是集值测度. 设 $x_n\in M(A_n)$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\langle x^*,x_n\rangle|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\infty$，及 X 是自反 Banach 空间，于是由[5]级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛. 对 $x\in\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(A_n)$，存在 $x_n\in M(A_n)$，使 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，而 $\langle x^*,x\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x^*,x_n\rangle\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_{M(A_n)}(x^*)=\sigma_{M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)}(x^*)$，所以

$$\sigma_{\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(A_n)}(x^*)\leqslant\sigma_{M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)}(x^*).$$

另一方面，对任 $\varepsilon>0$，取 $x_n\in M(A_n)$满足 $\sigma_{M(A_n)}(x^*)<\langle x^*,x_n\rangle+\frac{\varepsilon}{2^n}\ (n=1,2,\cdots)$. 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$无条件收敛得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\in\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(A_n)$，故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{M(A_n)}(x^*)<\sum_{n=1}^{\infty}\langle x^*,x_n\rangle+\varepsilon=\langle x^*,\sum_{n=1}^{\infty}x_n\rangle+\varepsilon\leqslant\sigma_{\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(A_n)}(x^*)+\varepsilon,$$

亦即 $\sigma_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)}(x^*)=\sigma_{M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)}(x^*)$. 根据 Ascoli-Mazur 分离性定理(见[6]p150 定理 3)易得

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\overline{\mathrm{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)).$$

余下来证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 是闭凸集. 因 $M(A_n)$是凸集, 易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 是凸集. 今设 $r\in\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)}$, 那么存在序列 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$, 满足 $x^{(m)}\to r$. 注意到 $M(A_n)$是弱紧集(因 X 自反, Alaoglu-Bourbaki 定理)及 Eberlein-Smuliar 定理, 利用对角线程序可找到子序列 $\{x^{(m_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $x_n^{(m_i)}\xrightarrow{W} x_n^{(0)}\in M(A_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 令 $x^{(0)}=\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)}}\in\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$. 对任意 $\varepsilon>0$, 取自然数 k_0, 满足 $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\frac{\varepsilon}{3}$, 又可取 i_0, 当 $i\geqslant i_0$ 时成立 $|x^*(x_n^{(m_i)})-x^*(x_n^{(0)})|<\frac{\varepsilon}{3k_0}$ $(1\leqslant n\leqslant k_0)$. 因此

$$|x^*(x^{(m_i)})-x^*(x^{(0)})|\leqslant\sum_{n=1}^{k_0}|x^*(x_n^{(m_i)})-x^*(x_n^{(0)})|+2\sum_{n=k_0+1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\varepsilon.$$

即 $x^{(m_i)}\xrightarrow{W} x^{(0)}=r\in\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$. 定理证毕.

定义 设$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$是一列从 Σ 到 X 的矢值测度, 称$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$是一致有界变差的, 如果存在常数 $M>0$, 使对 Ω 的任何有限分划 $\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$成立 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sup\limits_{m}|P_m|(A_i)\leqslant M$. 这里 $|P_m|(\cdot)$ 表示 P_m 的变差测度.

定理 2 设(Ω,Σ,μ)是有限测度空间, $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$是从 Σ 到 X 的一列两两等比、一致有界变差、μ-连续矢值测度, 则集值测度 $M(A)=\overline{\mathrm{co}}\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$是有界变差的, 并且成立

$$M(A)=\int_A\overline{\mathrm{co}}\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}d\mu,$$

这里 $f_m(t)$是 $P_m(\cdot)$的 Radon-Nikodym 导数.

证明 根据$\{P_m\}$的一致有界变差性不难知 M 是有界变差的. 令 $F(t)=\overline{\mathrm{co}}\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$(有关集值函数的可测性和积分理论参见[1]), 易知 $F(t)$是可测的. 今证 $F(t)$是可积有界的, 即 $|F(t)|=\sup\limits_{m}\|f_m(t)\|$ 是 μ 可积的, 因$\{t\in\Omega:|F(t)|=\infty\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{t\in\Omega:\|f_m(t)\|\geqslant n\}$, 若有

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{t\in\Omega:\|f_m(t)\|\geqslant n\})=\alpha>0,$$

则对任何自然数 n 都成立 $\mu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{t\in\Omega:\|f_m(t)\|\geqslant n\})\geqslant\alpha$. 令 $E_{m,n}=\{t\in\Omega:\|f_m(t)\|\geqslant n\}$, 作集 $E_{1,n}^{+}=E_{1,n}$, $E_{m,n}^{+}=E_{m,n}\setminus\bigcup\limits_{j<m}E_{j,n}$, 则诸$\{E_{m,n}^{+}\}_{m=1}^{\infty}$互不相交且 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_{m,n}^{+}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{t\in\Omega:\|f_m(t)\|\geqslant n\}$. 又 $|P_m|(E_{m,n}^{+})=\int_{E_{m,n}^{+}}\|f_m(t)\|d\mu$ (见[7]p46 定理 4)知

$$\sum_{m=1}^{\infty}|P_m|(E_{m,n}^{+})=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{E_{m,n}^{+}}\|f_m(t)\|d\mu\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}n\mu(E_{m,n}^{+})\geqslant n\alpha,$$

但由于 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|P_m|(E_{m,n}^{+})\leqslant\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sup\limits_{k}|P_k|(E_{m,n}^{+})<\infty$, 矛盾. 记 $R=\{t\in\Omega:|F(t)|<\infty\}$, 构造函数

$\varphi_m(t)=|F(t)|-\frac{1}{m},t\in R$；而当 $t\in\Omega\backslash R$ 时，$\varphi_m(t)=m$. 置 $G_{n,m}=\{t\in\Omega:\|f_n(t)\|\geqslant\varphi_m(t)\}$，于是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{n,m}=\Omega$. 作集 $G_{1,m}^{+}=G_{1,m},G_{n,m}^{+}=G_{n,m}\backslash\bigcup_{j<n}G_{j,m}(n\geqslant2)$，那么 $\{G_{n,m}^{+}\}_{n=1}^{\infty}$ 不交是 Ω 的一个分划. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}|P_n|(G_{n,m}^{+})\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_{n,m}^{+}}\varphi_m(t)d\mu=\int_R(|F(t)|-\frac{1}{m})d\mu+m\mu(\Omega\backslash R)$$

$$=\int_{\Omega}|F(t)|d\mu-\frac{1}{m}\mu(\Omega),$$

所以 $\int_{\Omega}|F(t)|d\mu<\infty$. 根据[8]p188 推论易得 $\int_A Fd\mu$ 是有界闭凸集. 又 $\{P_m(A)\}_{m=1}^{\infty}\subset\int_A F(t)d\mu$，从而 $M(A)\subset\int_A F(t)d\mu$. 令 $S=\{g:g=\sum_{j=1}^{n}a_jf_j,a_j\geqslant0$ 是有理数且 $\sum_{j=1}^{n}a_j=1,n\geqslant1\}$，则 $F(t)=\{\overline{g(t):g\in S}\}$ μ—a. e. 设 $f\in S_F$ 和 $\varepsilon>0$，由[1]p153 引理 1.3 有 Ω 的分划 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 及 $\{g_1,g_2,\cdots,g_k\}\subset S$ 满足 $\int_{\Omega}\|f-\sum_{i=1}^{k}\psi_{A_i}g_i\|d\mu<\varepsilon$,

ψ_{A_i} 是 A_i 的特征函数. 若记 $g_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j,a_{ij}\geqslant0,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1\ (1\leqslant i\leqslant k)$，则

$$\|\int_A fd\mu-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}P_j(A\cap A_i)\|=\|\int_A fd\mu-\sum_{i=1}^{k}\int_A g_i\psi_{A_i}d\mu\|$$

$$\leqslant\int_A\|f-\sum_{i=1}^{k}g_i\psi_{A_i}\|d\mu<\varepsilon.$$

但因

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}P_j(A\cap A_i)\in\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M(A\cap A_i)=\sum_{i=1}^{k}M(A\cap A_i)=M(A),$$

所以 $\int_A fd\mu\in M(A)$，从而 $\int_A fd\mu\subset M(A)$. 即 $M(A)=\int_A fd\mu=\int_A\overline{\mathrm{co}}\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}d\mu$.

设 $K_1\subset X$，称 $x\in K_1$ 为 K_1 的暴露点，如果存在 $x^*\in X^*$，使对一切 $y\in K_1\backslash\{x\}$ 有 $\langle x^*,x\rangle>\langle x^*,y\rangle$. 设 $M(\cdot)$ 是集值测度，称矢值测度 $P(\cdot)$ 是 M 的选择，若对每个 $A\in\Sigma,P(A)\in M(A)$.

引理 3 设 $M:\Sigma\to2^X\backslash\{\varnothing\}$ 是有界集值测度，且 x 是 $M(\Omega)$ 的暴露点，那么存在 M 的选择 P，使 $P(\Omega)=x$.

证明 设 $x_0^*\in X^*$ 满足 $\langle x_0^*,x\rangle>\langle x^*,y\rangle(y\in M(\Omega)\backslash\{x\})$. 对每个 $A\in\Sigma$，记 $x=u+v,u\in M(A),v\in M(\Omega\backslash A)$，而 $\langle x_0^*,x\rangle=\sup\limits_{y\in M(\Omega)}\langle x_0^*,x\rangle=\sup\limits_{y\in M(A)}\langle x_0^*,y\rangle+\sup\limits_{y\in M(\Omega\backslash A)}\langle x_0^*,y\rangle$，故 $\langle x_0^*,u\rangle=\sup\limits_{y\in M(A)}\langle x_0^*,y\rangle$，且 $u\in M(A)$ 由 x_0^* 唯一确定. 于是定义 $P(A)=u$. 现证 $P:\Sigma\to X$ 是矢值测度. 事实上，设 $\{A_n\}$ 是 Σ 的不交列，对每个 x^*，$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*P(A_n)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x^*M(A_n)|<\infty$，又 X 自反，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ 无条件收敛. 因

$$\langle x_0^*,\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_0^*,P(A_n)\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{y\in M(A_n)}\langle x_0^*,y\rangle$$

$$=\sup_{y\in M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)}\langle x_0^*,y\rangle=\langle x_0^*,P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\rangle.$$

所以 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，即 P 是 M 的选择且 $P(\Omega)=x$.

注 引理 3 在有界变差的条件下，由 Hiai 在[2]中建立.

定理 3 设 $M:\Sigma\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 是有界闭凸值集值测度，那么存在 M 的选择列 $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使对每个 $A\in\Sigma$，都有 $M(A)=\overline{\mathrm{co}}\{P_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$.

证明 由于 $M(\Omega)$ 是自反 Banach 空间的有界闭凸集，所以 $M(\Omega)$ 是弱紧凸的，故据[9]，$M(\Omega)$ 可表成其暴露点的闭凸包. 又 X 可分，于是可选择暴露点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $M(\Omega)=\overline{\mathrm{co}}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 由引理 3，对每个 x_k，存在选择 P_k 满足 $P_k(\Omega)=x_k$. 命 $H(A)=\overline{\mathrm{co}}\{P_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$，来证 $M(A)=H(A)$. 注意到 $H(A)\subset M(A)$，$H(\Omega\setminus A)\subset M(\Omega\setminus A)$，所以

$$M(\Omega) = H(\Omega) \subset H(A) + H(\Omega\setminus A) \subset M(A) + M(\Omega\setminus A) = M(\Omega).$$

故有 $M(A)+M(\Omega\setminus A)=H(A)+H(\Omega\setminus A)$. 从分离性定理不难得到

$$M(A) = H(A) = \overline{\mathrm{co}}\{P_k(A)\}_{k=1}^{\infty}.$$

参 考 文 献

[1] F. Hiai and H. Umegaki, *Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions*, J. Multiva. Anal. 7(1977), 149—183.

[2] F. Hiai, *Radon-Nikodym theorems for set-valued measures*, J. Multiva. Anal. 8(1978), 96—118.

[3] 张文修，李腾，集值测度的表示定理，数学学报，31(1988)，201—208.

[4] R. Aumann, *Integrals of set—valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12(1965), 1—12.

[5] M. M. Day, *Normed Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[6] 定光桂，拓扑线性空间选讲，广西教育出版社，1987.

[7] J. Diestel and Uhl J. JR, *Vector measures*, Math. Surveys No 15. Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[8] N. S. Papageorgiou, *On the theory of banach space valued multifunctions*, J. Multiva. Anal. 17(1985), 185—206.

[9] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. Math. 88(1968), 35—46.

Representation Theorem for Set-Valued Measures in Banach Spaces

Wu Congxin *Xue Xiaoping*

(Dept. of Math., Harbin Institute of Technology, 150001)

Abstract

In this paper, set valued measures in Banach spaces by representive problem of sequence of vector valued measures are studied, the relation ship between set valued measures and the $R-N$ dirivative of its single valued selections is obtained.