第14卷第3期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 3
1994年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1994

半粘合拓扑空间与商半拓扑空间*

苏雅拉图
(内蒙古师范大学数学系,呼和浩特 010022)

摘　要　作者在文[1]中给出了半粘合拓扑空间以及半粘合映射的定义,并得到了它们的基本性质.本文进一步研究了与半粘合拓扑空间和半粘合映射有关的问题.另外也讨论了商空间成为S_2-拓扑空间的条件.最后给出了一个半同胚定理.

关键词　半粘合拓扑空间,半粘合映射,商半拓扑空间,半同胚.

§0　引　言

自1963年Norman Levine引入半开集以来,国内外数学工作者着手研究了这方面的问题,从而一般拓扑学在这一范围内出现了大量的论文(见[1],[3]—[9]),提出了不少新思想,新概念,得到了许多有趣而漂亮的结果.笔者在文[1]中用不同于[2]中的方法定义了一种新的半拓扑空间——半粘合拓扑空间,同时也第一次提出了半粘合映射的概念,从而把一般拓扑学中粘合拓扑及粘合映射的概念推广到半拓扑学范围内.本文继续研究与半粘合拓扑空间和半粘合映射有关的问题,并且给出了商空间成为S_2-拓扑空间的两个充分条件,及一个半同胚定理所得到的结果改进、推广和补充了文[1],[2]及[4]中的研究

§1　基本术语

为了引用方便起见,我们把散见于各文献中的有关术语及结论汇集于下:

1°　设X是拓扑空间,X中的集A叫做半开集[2],是指存在开集V,使$V\subset A\subset \overline{V}$. X上的一切半开集所成的族记为$SO(X)$,称$(X,SO(X))$为半拓扑空间,X中的集B叫做半闭集[3],是指存在闭集F,使$F^\circ\subset B\subset F$.

命题1.1[4]　(1)若A是半开集,则$X-A$是半闭集.　(2)若B是半闭集,则$X-B$是半开集.

2°　设X,Y都是拓扑空间,映射$f:X\to Y$叫做半开的,是指对X中任意开集E,$f(E)$为Y中半开集.映射$f:X\to Y$叫做前半开的,是指对X中任意半开集F,$f(F)$为Y中半开集.映射$f:X\to Y$叫做前半闭的(Pre-semi-closed),是指对X中任意半闭集H,$f(H)$为Y中半闭集.映射$f:X\to Y$叫做不定的,是指对Y中任意半开集Q,$f^{-1}(Q)$为X中半开集.映射$f:X\to Y$叫做半同

* 1991年11月14日收到.1993年3月31日收到修改稿.内蒙古科委自然科学基金资助课题.

胚映射，是指 f 是满单射且 f 是不定的前半开映射.

命题 1.2[5]　设 X,Y 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 是满单射，则下列命题等价：

(1) $f:X\to Y$ 是不定的. (2) 对于 Y 的任意半闭集 H，$f^{-1}(H)$ 是 X 中半闭集. (3) $f^{-1}:Y\to X$ 是前半开的. (4) $f^{-1}:Y\to X$ 是前半闭的.

命题 1.3[5]　设 X,Y 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 是满单射，则下列命题等价：

(1) f 是半同胚映射. (2) f 是不定的前半闭映射. (3) f,f^{-1} 都是前半开映射. (4) f,f^{-1} 都是不定映射. (5) f,f^{-1} 都是前半闭映射.

§2　半粘合拓扑与半粘合映射

定义 2.1　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 是满射. 称 $J(p,Y,SO(Y))=\{U\subset Y\,|\,p^{-1}(U)$ 在 X 中是半开集$\}$为 Y 中由 p 决定的半粘合拓扑空间.

定义 2.2[1]　设 X,Y 为拓扑空间，一个不定的满射 $p:X\to Y$ 说是半粘合映射，如果 Y 中的半拓扑恰好是 $J(p,Y,SO(Y))$. 即 $U\subset Y$ 是半开集就说明 $p^{-1}(U)\subset X$ 是半开集，而且只有这样的 U 才是半开集.

定理 2.3　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 为不定的满射，则 $SO(Y)\subset J(p,Y,SO(Y))$.

证明　设 $U\in SO(Y)$，则 $p^{-1}(U)\in SO(X)$（因 p 是不定映射），于是 $U\in J(p,Y,SO(Y))$，故 $SO(Y)\subset J(p,Y,SO(Y))$.

1°　映射成为半粘合映射的充分条件

定理 2.4[1]　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 是不定的前半开满射，则 p 是一个半粘合映射.

定理 2.5[1]　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 是不定映射，若存在一个不定映射 $s:Y\to X$ 使得 $p\circ s=I$，则 p 是一个半粘合映射.

2°　映射成为半粘合映射的充分必要条件

定理 2.6[1]　设 X,Y,Z 都是拓扑空间，$p:X\to Y$ 是半粘合映射，$g:Y\to Z$ 是满射，则 $g\circ p$ 是半粘合映射的充分必要条件是 g 是半粘合映射.

定理 2.7　设 X,Y 是拓扑空间，$p:X\to Y$ 是不定的满射，则 p 是半粘合映射的充分必要条件是：对于每个拓扑空间 Z 和每个映射 $g:Y\to Z$，$g\circ p$ 的不定性蕴含着 g 的不定性.

证明　必要性由文[1]的定理 7 得到.

充分性　为了避免混乱，令 Y' 是带有粘合拓扑 $J(p)=\{U\subset Y\,|\,p^{-1}(U)\subset X$ 的开集$\}$的集 Y，$p':X\to Y'$ 是由 p 决定的半粘合映射，$i:Y\to Y'$ 是恒等映射. 因为 $i\circ p=p'$ 是不定映射，由假设知，i 必为不定映射. 又因为 $i^{-1}\circ p'=p$ 是不定映射，而 p' 是半粘合映射，由必要性可知，i^{-1} 是不定映射. 再由命题 1.3 知，$i:Y\to Y'$ 是半同胚映射，即 Y 中半拓扑就是半粘合拓扑 $J(p,Y,SO(Y))$，故 p 是半粘合映射.

3°　半粘合映射成为前半开(或闭)映射的充分必要条件

定理 2.8[1]　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 是半粘合映射，则 p 是前半开映射的充要条件是：对 X 中的每个半开集 U，$p^{-1}p(U)$ 是 X 中半开集.

定理 2.9　设 X,Y 为拓扑空间，$p:X\to Y$ 是半粘合映射，则 p 是前半闭映射的充要条件是：对 X 中每个半闭集 U，$p^{-1}p(U)$ 是 X 中半闭集.

利用命题 1.1 及定理 2.8 易证该定理.

§3 商半拓扑空间

设 X 是拓扑空间，R 是 X 的一个等价关系，$p:X\to X/R$ 为 $x\to Rx$ 是射影(即商映射)，此处 X/R 为商空间(即由 p 决定的粘合拓扑空间). 射影 p 是连续映射，但未必是不定映射. 如果 $p:X\to X/R$ 是半粘合映射，则 p 是不定映射.

定义 3.1 商空间 X/R 中所有半开集所组成的族为 $SO(X/R)$，称 $(X/R,SO(X/R))$ 为商半拓扑空间.

定理 2.3 中的拓扑空间 Y 取为商空间 X/R 时，有如下的

推论 3.2 设 $p:X\to X/R$ 为不定的满射，则 $SO(X/R)\subset J(p,X/R,SO(X/R))$.

根据半粘合映射的定义，我们有如下的

推论 3.3 设 $p:X\to X/R$ 为半粘合映射，则 $SO(X/R)=J(p,X/R,SO(X/R))$.

定理 3.4[4] (1)设商映射 $p:X\to X/R$ 为半开映射. 且 $A\in SO(X)$，则 $p(A)\in SO(X/R)$.

(2) 设商映射 $p:X\to X/R$ 为几乎开映射，且 $A\in SO(X/R)$，则 $p^{-1}(A)\in SO(X)$.

定理 2.8 和 2.9 中的拓扑空间 Y 取为 X/R 时，有如下的

推论 3.5 设 $p:X\to X/R$ 为半粘合映射，则 p 为前半开(或闭)映射的充要条件是：对 X 中任意半开(或半闭)集 U，$p^{-1}p(U)$是 X 中半开(或半闭)集.

定理 3.6 设 $p:X\to X/R$ 是半粘合映射，$h:X\to Y$ 是不定映射，假定 hp^{-1} 是单值(即 h 送每一个 $p^{-1}(d)$到固定点，其中 d 为 X/R 中任意点)，则 $hp^{-1}:X/R\to Y$ 是不定映射，且 hp^{-1} 是前半开(或闭)映射的充要条件是 $h(U)$为 Y 中半开(或半闭)集(此处，X,Y 都是拓扑空间，U 是 X 中半开(或半闭)集且适合 $U=p^{-1}p(U)$).

证明 由于 hp^{-1} 单值，$h(x)=h(p^{-1}p(x))=(hp^{-1})p(x)$，且 h 是不定映射，p 是半粘合映射，由定理 2.7 得，hp^{-1} 是不定映射.

若 $hp^{-1}:X/R\to Y$ 是前半开(或闭)集，令 U 是 X 中半开(或半闭)集且适合 $U=p^{-1}p(U)$. 因为 p 是半粘合映射，所以 $p(U)$是 X/R 中半开(或半闭)集. 又由于

$$h(U)=h(p^{-1}p(U))=(hp^{-1}p(U)$$

且 hp^{-1} 是前半开(或闭)映射，故 $h(U)$是 Y 中半开(或半闭)集.

令 $V\subset X/R$ 是 X/R 中任意半开(或半闭)集，则 $U=p^{-1}(V)$是 X 中一个半开(或半闭)集且

$$p^{-1}p(U)=p^{-1}(pp^{-1}(V))=p^{-1}(V)=U.$$

由假设知 $h(U)=(hp^{-1})p(U)=hp^{-1}(V)$是 Y 中半开(或半闭)集，这意味着 hp^{-1} 是前半开(或闭)映射.

定理 2.6 中的拓扑空间 Y 取为 X/R 时，有如下的

推论 3.7 设 $p:X\to X/R$ 是半粘合映射，Z 是一个拓扑空间，$h:X/R\to Y$ 是满射，则 $h\circ p$ 为半粘合映射的充要条件是 h 为半粘合映射.

§4 商空间成为 S_2-拓扑空间[6]的条件

引理 4.1 设 X 为 S_2-拓扑空间,Y 为任意拓扑空间,$f:X\to Y$ 是前半闭的满单射,则 Y 是 S_2-拓扑空间.

证明 设 $y_1,y_2\in Y,y_1\neq y_2$,则 $x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$ 且 $x_1\neq x_2$. 由于 X 是 S_2-拓扑空间,故存在 $A_1,A_2\in SO(X)$,使得 $x_1\in A_1,x_2\in A_2$ 且 $A_1\cap A_2=\varnothing$,这时,$f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$,$y_1\in f(A_1)$,$y_2\in f(A_2)$.

由于 f 是满单射,故前半闭映射和前半开映射等价,于是 $f(A_1),f(A_2)\in SO(Y)$. 因此,Y 为 S_2-拓扑空间.

引理 4.2 设 X 为 S_2-拓扑空间,A 为 X 中 α 集[2],则 A 也是 S_2-拓扑空间.

证明 设 $p,q\in A\subset X$,则存在 $U_1,U_2\in SO(X)$,使 $p\in U_1,q\in U_2$ 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 这时,$(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)=\varnothing$. 由文[4]中命题 3.2 知,$U_1\cap A,U_2\cap A$ 为 A 中半开集,并且 $p\in U_1\cap A,q\in U_2\cap A$. 故 A 为 S_2-拓扑空间.

引理 4.3 设 Y 是 S_2-拓扑空间,X 为任意拓扑空间,$f:X\to Y$ 为不定的单射且 $f(X)$ 为 Y 中 α 集,则 X 是 S_2-拓扑空间.

证明 因为 $f:X\to Y$ 是不定单射,所以 $f:X\to f(X)$ 是不定的满单射. 由引理中的条件及引理 4.2 得,$f(X)$ 为 S_2-拓扑空间. 再由命题 1.2 知,逆映射 $f^{-1}:f(X)\to X$ 是 S_2-拓扑空间 $f(X)$ 到 X 的前半闭的满单射. 由引理 4.1 得 X 是 S_2-拓扑空间.

设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$ 是不定映射. X 中由 f 决定如下的等价关系 $K(f):x\sim x'$ 当且仅当 $f(x)=f(x')$,于是,我们有如下的

定理 4.4 设 $p:X\to X/K(f)$ 是半粘合映射,Y 是 S_2-拓扑空间,$f:X\to Y$ 是不定映射. 若 (1) fp^{-1} 是单值的;(2) $fp^{-1}(X/K(f))$ 为 Y 中的 α 集. 则 $X/K(f)$ 是 S_2-拓扑空间.

证明 由定理 3.6 知,$fp^{-1}:X/K(f)\to Y$ 是不定映射,并且易验证 $fp^{-1}:X/K(f)\to Y$ 是单射. 注意到条件(2),利用引理 4.3 得,$X/K(f)$ 为 S_2-拓扑空间.

定理 4.5 设 X 是拓扑空间,R 是 X 中一个等价关系,$p:X\to X/R$ 为 $x\to Rx$ 是射影. 若 (1) p 是前半开映射;(2) $R\subset X\times X$ 是半闭集且 $X\times X-R=A_1\times A_2,A_i\in X$ $(i=1,2)$. 则 X/R 是 S_2-拓扑空间.

证明 设 $p(x),p(y)$ 是 X/R 中两个不同点,则 x,y 不满足关系 R. 因为 $R\subset X\times X$ 是半闭集,所以 $X\times X-R=A_1\times A_2$ 是半开集,且 $(x,y)\in A_1\times A_2$. 由文[4]中的定理 3.3 知,$A_1,A_2\in SO(X)$. 由于 p 是前半开映射,因此,$p(A_1),p(A_2)\in SO(X/R)$,并且 $p(A_1)\cap p(A_2)=\varnothing$,$p(x_1)\in p(A_1)$,$p(x_2)\in p(A_2)$. 故 X/R 是 S_2-拓扑空间.

§5 一个半同胚定理

定理 5.1 设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$ 是不定的满射,$p:X\to X/K(f)$ 是半粘合映射,且 fp^{-1} 单值,则 $fp^{-1}:X/K(f)\to Y$ 为半同胚当且仅当 f 为半粘合映射(此处,$K(f)$ 为 §4 中所确定的等价关系).

证明 由定理 3.6 知，$fp^{-1}: X/K(f) \to Y$ 是不定映射，并且易验证 $fp^{-1}: X/K(f) \to Y$ 满单射.

设 $f: X \to Y$ 是半粘合映射，令 U 是 X 中半开集且适合 $U = p^{-1}p(U)$. 由等价关系 $K(f)$ 知，对任意 $x \in X$，有 $f^{-1}f(x) = p^{-1}p(x)$. 于是 $f^{-1}f(U) = p^{-1}p(U) = U$，故 $f^{-1}f(U)$ 是 X 中半开集，由 f 是半粘合映射知，$f(U) \in SO(Y)$. 由定理 3.6 知，fp^{-1} 是前半开映射. 于是，fp^{-1} 是不定的满单射，且前半开映射，故 fp^{-1} 是半同胚映射.

反之，若 fp^{-1} 是半同胚映射，则它一定是半粘合映射. $f = (fp^{-1}) \circ p$ 且 fp^{-1}，p 都是半粘合映射，故 f 也是半粘合映射.

参 考 文 献

[1] 苏雅拉图，半粘合拓扑空间以及半粘合映射，宁夏大学学报，4(1989)，44—47.

[2] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Monthly AMS, 70:1(1963), 36—41.

[3] S. Gene Crossley and S. K. Hildebrand, *Semi-closed sets and semi-continuity in topological spaces*, ibid 123—126.

[4] 李厚源，半拓扑子集的一些性质，数学研究与评论，11：3(1991)，355—358.

[5] 刘世泽，半同胚定理，华中师范大学学报，21：2(1987)，171—174.

[6] 胡庆平，S- 分离性，数学研究与评论，4：3(1984)，7—12.

[7] 王国俊，S- 闭空间的性质，数学学报，24：1(1981)，55—63.

[8] S. Gene Crossley and S. K. Hildebrand, *Semi-topological properties*. Fund, Math. 74; 1972, 233—254.

[9] 苏雅拉图，导出半拓扑空间，内蒙古师大学报，4(1989)，6—9.

[10] J. L. Kelley, General gopology, Van Nostrand, 1955.

Semi-Identification Topological Space and Quotient Semi-Topological Space

Suyalatu

(Dept. of Math. Inner Mongolia Normal University, Huhehaote 010022)

Abstract

In [1], we give the definition of semi-identification topological space and semi-identification mapping, and discussed its fundamental properties. In this paper, we investigate the problems on semi-identification topological space and quotient semi-topological space. We also discuss the conditions for the quotient space to become S_2-topological space. At last we give a semi-homemorphic theorem.