# 实轴上函数类 $W^rH^\omega$ 的平均 n—宽度*

陈迪荣

（中国科学院数学研究所，北京 100080）

**摘　要**　对于 $r$ 阶导数的连续模被一个给定上凸连续模所控制的所有 $r$ 阶可微函数类，我们求出在 $L_\infty(R)$—范数下其平均 $n$—宽度，并找到了极优子空间.

**关键词**　平均 $n$—宽度，极子空间.

## 一　引　言

记 $R$ 为实数轴. $\omega(t)$为给定连续模. 定义

$$W^rH^\omega=\{f\quad |f,f^{(r)}\in L_\infty(R),f^{r-1}\text{ 在 } R \text{ 上局部绝对连续},\omega(f^{(r)},t)\leqslant\omega(t)\},$$

$$W^rH^\omega_{\infty,1}=\{f\quad |f,f^{(r)}\in L_1(R),f^{r-1}\text{ 在 } R \text{ 上局部绝对连续},\sum_{j=-\infty}^{\infty}\omega_j(f^{(r)},t)\leqslant\omega(t)\},$$

其中 $L(R)$为赋以范数 $\|\cdot\|$,的空间，$\omega(g,t)$，$\omega_j(g,t)$是 $g$ 分别在 $R$ 和区间$[j-1,j]$上的连续模.

本文的目的是求出 $W^rH^\omega$ 和 $W^rH^\omega_{\infty,1}$ 分别在 $L_\infty(R)$和 $L_1(R)$上的平均 $n$—宽度. 平均 $n$—宽度的概念是不久前由 V. M. Tikhomirov 提出的（见[1]）. 有关这一课题的研究已经有了许多结果（[2]—[4]）. 然而迄今为止所考虑的函数类都是 Sobolev 类或是 Sobolev—Wiener 类，而在更细致的类 $W^rH^\omega$ 和 $W^rH^\omega_{\infty,1}$ 没有建立平均 $n$—宽度的结果. $W^rH^\omega_{\infty,1}$ 是刘永平新近引入的（[5]）. [5]讨论了该类上的最优求积公式问题.

为了叙述结果，先定义一族函数[6]. 设 $a>0$，定义 $\Phi_{a,k}$ 如下：

$$\Phi_{a,0}(x)=\begin{cases}1/2, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & x\overline{\in}[0,a].\end{cases}$$

$$\Phi_{a,0}(x)=\begin{cases}\int_0^{a-x}\Phi_{a,k-1}(t)dt/2, & x\in[0,a],\\ 0, & x\overline{\in}[0,a],k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

本文的结果是下面二条定理. 有关概念及记号可见[1]—[4].

**定理** 1　若 $\omega(t)$是上凸连续模，则对 $n>0$，

(1) $\bar{d}_n(W^rH^\omega,L_\infty)=\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)\omega'(t)dt$. 而且对任何 $m>r$，样条子空间

* 1991年9月25日收到，93年6月21日收到修改稿. 国家自然科学基金资助课题.

$$\mathscr{S}_{m,n}=\{S\mid S\in C^{m-2}(R),S^{(m)}(t)=0,\forall\, t\in(\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}),j\in Z\}$$

是$\overline{d}_n(W^rH^\omega,L_\infty)$的极子空间.

(2)任何$\overline{d}_n(W^1_\infty,L_\infty)$的极子空间都是$\overline{d}_n(H^\omega,L_\infty)$的极子空间，其中$W^m_p=\{f\mid f,f^{(m)}\in L_p(R)$，$f^{(m-1)}$在$R$上局部绝对连续，$\|f^{(m)}\|_p\leqslant 1\}$

**定理 2** 若$\omega(t)$是上凸连续模，$n\in Z_+$，则

$$\overline{d}_n(W^rH^\omega_{\infty,1})=\sup_{f\in W^rH^\omega_{\infty,1}}\|f-\sigma_{r,n}(f)\|_1$$

$$=\frac{4}{(n\pi)^{r+1}}\int_0^\pi\Phi_{\pi,r+1}(t)\omega'(\frac{t}{n\pi})dt=4\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r+1}(t)\omega'(t)dt.$$

(最后的等式由$\Phi_{a,r}$的性质而得到)其中$\sigma_{r,n}(f)$表示$\mathscr{S}_{r,n}$中在点$\{\frac{j}{n}+\frac{1+(-1)^r}{4n}\}_{j\in Z}$插值于$f$的有界样条函数(其唯一存在性见[7]).

## 二 定理 1 的证明

**引理 1** 设$T>0,g\in\widetilde{W}^r_1[-T,T]$，这里$\widetilde{W}^r_1[-T,T]=\{f\mid f^{(r-1)}$在$[-T,T]$上绝对连续，$f$以$2T$为周期，$\|f^{(r)}\|_{L[-T,T]}\leqslant 1\}$. 令$G(x)=\int_{-T}^x g(t)dt$. 若$\|g\|_{L_1[-T,T]}\leqslant\|\Phi_{a,r}\|$，且$G(T)=0$，那么对任何上凸连续模$\omega(t)$成立$\sup\limits_{f\in H^\omega}\int_{-T}^T f(x)g(x)dx\leqslant\int_0^a\Phi_{a,r}(t)\omega'(t)dt$.

引理 1 的证明可 照[6]的定理 7.5.2 进行，过程从略.

**定理 1 的证明** 先证任给$m>r$，

$$E(W^rH^\omega,\mathscr{S}_{m,n})_\infty:=\sup_{f\in W^rH^\omega}\{\inf_{S\in\mathscr{S}_{m,n}}\|f-S\|_\infty\}\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)\omega'(t)dt. \qquad (2.1)$$

由样条逼近的对偶定理[8]，任给$f\in W^rH^\omega$有

$$\inf_{S\in\mathscr{S}_{m,n}}\|f-S\|_\infty=\sup\{\int_R f(x)\varphi^{(m)}(x)dx\mid\varphi\in W^m_1,\varphi(j/n)=0,\quad j\in Z\}.$$

由[8]，$\lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi^{(j)}(x)=0,j=0,\cdots,m-1$. 再根据$f,f^{(r)}\in L_\infty(R)$以及 Kolmogorov 不等式，有$\|f^{(j)}\|_\infty<+\infty,j=1,2,\cdots,r-1$. 因此利用分部积分法$\int_R f\varphi^{(m)}dx=\int_R f^{(r)}\varphi^{(m-r)}dx$.

以下使用 Cavaretta 的周期化技巧[9]. 取函数$g(x)$如下：

$$g(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ (-1)^m(x-2)^m\sum\limits_{k=0}^{m-1}\binom{m+k-1}{k}(x-1)^k, & 1<x<2\\ (-1)^m(x+2)^m\sum\limits_{k=0}^{m-1}\binom{m+k-1}{k}(x+1)^k, & -2<x<-1\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

对$N>0,\delta\in(0,1)$，定义$\varphi_N(x)=\delta\varphi(x)g(x/N),x\in R$. 因为$g\in C^{m-1}(R)$以及$\|g^{(j)}\|_\infty\leqslant C,j=$

$0,\cdots,m$，其中 $C$ 为常数，于是由 Stein 不等式（见[3]、[8]）

$$\varphi_N^{(k)}(x)=\delta\varphi^{(k)}(x)g(x/N)+\delta\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\varphi^{(k-1)}(x)g^{(j)}(x/N)N^{-j}\in L_1(R),$$

而且 $\int_R|\varphi_N^{(k)}(x)-\delta\varphi^{(k)}(x)g(x/N)|dx=O(\frac{1}{N})$，$N\to+\infty$. 因此

$$|\delta\int_R f^{(r)}(x)\varphi^{(m-r)}(x)g(x/N)|\leqslant|\int_R f^{(r)}\varphi_N^{(m-r)}dx|+O(\frac{1}{N}). \tag{2.2}$$

由于 $\varphi^{(k)}(-2N)=\varphi^{(k)}(2N)=0$，$k=0,\cdots,m-1$，可以将 $\varphi_N(x)$ 在 $[-2N,2N]$ 上的限制 $\varphi_N|_{[-2N,2N]}$ 以周期为 $4N$ 延拓到全实轴，记延拓后的函数为 $\varphi_N$，则 $\tilde{\varphi}_N\in W_1^m[-2N,2N]$. 显然，当 $x\in[-2N,2N]$ 时，$(\tilde{\varphi}_N)^{(k)}(x)=\varphi_N^{(k)}$，$k=0,1,\cdots,m$. 而且 $\|(\tilde{\varphi})^{(k)}\|_{L[-2N,2N]}=\|(\tilde{\varphi})_N^{(k)}\|_1$，$k=0,\cdots,m$.

又由 $(\tilde{\varphi}_N)^{(m-r)}\in\tilde{W}_1^r[-2N,2N]$，$(\tilde{\varphi}_N)^{(m-r-1)}(x)=\int_{-2N}^{x}(\tilde{\varphi}_N)^{(m-r)}(t)dt$ 满足 $(\tilde{\varphi})^{(m-r-1)}(2N)=0$ 以及[8] $\|(\tilde{\varphi})^{(m-r)}\|_1\leqslant\|\Phi_{\frac{1}{n},r}\|_1$ 知 $(\tilde{\varphi}_N)^{(m-r)}$ 满足引理 1 中 $g$ 的条件，所以

$$|\int_R f^{(r)}\varphi^{(m-r)}dx|=|\int_{|x|\leqslant 2N}f^{(r)}\varphi^{(m-r)}dx|=|\int_{|x|\leqslant 2N}f^{(r)}(\varphi)^{(m-r)}dx|\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)\omega'(t)dt. \tag{2.3}$$

令 $N\to+\infty$，注意到 $\forall\ x\in R$，$|f^{(r)}\varphi^{(m-r)}(x)g(x/N)|\leqslant\|f^{(r)}\|_\infty|\varphi^{(m-r)}(x)|$ 以及 $\lim\limits_{N\to\infty}g(x/N)=1$. 由控制收敛定理以及(2.2)和(2.3)，$\delta|\int_R f^{(r)}(x)\varphi^{(m-r)}(x)dx|\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)\omega'(t)dt$. 令 $\delta\to1^-$，再由 $f,\varphi$ 的任意性得到(2.1). 由于 $\overline{\dim}\mathscr{S}_{m,n}=n$[3]，于是

$$\bar{d}_n(W^rH^\omega,L_\infty)\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)\omega'(t)dt. \tag{2.4}$$

为了证明定理的(1)，只需证明(2.4)的反向不等式亦成立.

设 $F\subseteq L_\infty(R)$ 是 $L_\infty(R)$ 任意满足 $\overline{\dim}F\leqslant n$ 的子空间之定义，$\beta\in(0,\frac{1}{n})$. 对 $T_N=N_\beta$，$N$ 为自然数. 由 $\dim F$ 之定义，存在 $\varepsilon_0>0$，使得任何 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 都有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{K(\varepsilon,T_N)}{2T_N}\leqslant n, \tag{2.5}$$

其中 $K(\varepsilon,T_N)=\min\{\dim L\ |E(B(F),L,L_\infty[-T_N,T_N])<\varepsilon\}$，$B(F)=\{x|x\in F,\|x\|_\infty\leqslant1\}$，$L\subseteq L_\infty[-T_N,T_N]$ 的线性子空间，而 $E(B(F),L,L_\infty[-T_N,T_N])=\sup\limits_{x\in B(F)}\inf\limits_{y\in L}\|x-y\|_{L_\infty[-T_N,T_N]}$. 由 $\beta n>1$ 以及(2.5)，当 $N$ 充分大时，$K(\varepsilon,T_N)<2N$. 于是存在 $L_\infty[-T_N,T_N]$ 的线性子空间 $L$ 满足 $\dim L<2N$ 以及 $E(\beta(F),L,L_\infty[-T_N,T_N])<\varepsilon$.

根据[6]，$W^rH^\omega$ 的子类 $W^rH^\omega[-T_N,T_N]=\{f|f\in W^rH^\omega,f(x+2T_N)=f(x)\}$ 中包含以

$$\int_0^{\frac{\pi}{N}}\Phi_{\frac{\pi}{N},r}(t)(\frac{NB}{\pi})^{r+1}\omega'(\frac{NB}{\pi}t)dt$$

为半径的 $2N$ 维球体. 于是由球宽度定理[6]，存在 $f_0\in W^rH^\omega[-T_N,T_N]$ 使得

$$\inf_{y\in L}\|f_0-y\|_{L_\infty[-T_N,T_N]}=\|f_0\|_\infty=\int_0^{\frac{\pi}{N}}\Phi_{\frac{\pi}{N},r}(t)(\frac{NB}{\pi})^{r+1}\omega'(\frac{NB}{\pi}t)dt=\int_0^\beta\Phi_{\beta,r}(t)\omega'(t)dt,$$

最后的等式成立是由于 $\Phi_{\alpha,r}$ 的性质[6]. 因此

$$\inf_{x\in F}\|f_0-x\|_\infty=\inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|_\infty\leqslant 2\|f_0\|_\infty}}\|f_0-x\|_\infty$$
$$\geqslant\inf_{y\in L}\|f_0-y\|_{L_\infty[-T_N,T_N]}-\sup_{\substack{\|x\|_\infty\leqslant 2\|f\|_\infty\\ x\in F}}\{\inf_{y\in L}\|x-y\|_{L_\infty[-T_N,T_N]}\}$$
$$\geqslant\int_0^\beta\Phi_{\beta,r}(t)\omega'(t)dt-2\|f_0\|_\infty\varepsilon.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，$E(W^rH^\omega,F,L_\infty(R))\geqslant\int_0^\beta\Phi_{\beta,r}(t)\omega'(t)dt$ 再令 $\beta\to\frac{1}{n}$ 便得到(1).

为证(2)，在(1)中令 $r=0,\omega(t)=t$. 得到 $\overline{d}_n(W^1_\infty,L_\infty)=\frac{1}{2}\omega(\frac{1}{n})=\frac{1}{2n}$. 与周期情形一样可证[6]

$$E(H^\omega,KW^1_\infty,L_\infty)\leqslant\frac{1}{2}\max_{t>0}[\omega(t)-Kt],\tag{2.6}$$

$K>0$ 为常数，$KW^1_\infty=\{Kf\mid f\in W^1_\infty\}$. 因 $\omega(t)$ 是上凸连续模，可选择 $K=K_n$ 使(2.6)右边最大值在 $t=1/n$ 达到[6]. 若 $F$ 是 $W^1_\infty$ 的极子空间，则也是 $K_nW^1_\infty$ 的极子空间，即 $E(K_nW^1_\infty,F,L_\infty(R))=\frac{K_n}{2n}$. 因此

$$E(H^\omega,F,L_\infty(R))\leqslant E(H^\omega,K_nW^1_\infty,L_\infty(R))+E(K_nW^1_\infty,F,L_\infty(R))$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[\omega(\frac{1}{n}-K_n\frac{1}{n}]+\frac{K_n}{2n}=\frac{1}{2}\omega(\frac{1}{n})=\overline{d}_n(H^\omega,L_\infty).$$

所以(2)成立. 定理证毕.

**推论**[1] $\overline{d}_n(W^{r+1}_\infty,L_\infty)=K_{r+1}/(n\pi)^{r+1},r\geqslant 0$，其中 $K$ 为 Favard 常数.

**证明** 在定理 1 中取 $\omega(t)=t$，则 $W^rH^\omega=W^{r+1}_\infty$，因此

$$\overline{d}_n(W^{r+1}_\infty,L_\infty)=\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_{\frac{1}{n},r}(t)dt=K_{r+1}/(n\pi)^{r+1}.$$

## 三 定理 2 的证明

**引理 2**[10] 设 $n$ 为自然数，$\sigma_{r,n}(f)$ 是由定理 2 所定义的插值样条，那么

$$\sup_{f\in W^rH^\omega[-1,1]}\|f-\sigma_{r,n}(f)\|_{L_1[-1,1]}=\frac{4}{(n\pi)^{r+1}}\int_0^\pi\Phi_{\pi,r+1}(t)\omega'(\frac{t}{n\pi})dt,$$

其中 $W^rH^\omega[-1,1]$ 由定理 1 证明过程中所定义.

**定理 2 的证明** 利用引理 2 以及周期化的方法(见[3]或[11])可证得

$$\sup_{f\in W^rH^\omega_{\infty,1}}\|f-\sigma_{r,n}(f)\|_1\leqslant\frac{4}{(n\pi)^{r+1}}\int_0^\pi\Phi_{\pi,r+1}(t)\omega'(\frac{t}{n\pi})dt,$$

于是 $\overline{d}_n(W^rH^\omega_{\infty,1},L_1)\leqslant\frac{4}{(n\pi)^{r+1}}\int_0^\pi\Phi_{\pi,r+1}(t)\omega'(\frac{t}{n\pi})dt$. 下证反向不等式.

设 $F\subseteq L_1(R)$ 是任一满足 $\overline{\dim}F\leqslant n$ 的线性子空间. 同定理 1 之证一样，存在 $\varepsilon_0>0$，使得任何 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 都有 $2N-(r+1)$ 维子空间 $L\subseteq L_1[-T_N,T_N]$ 成立不等式 $E(B(F),L,L_1[-T_N,T_N])<\varepsilon$，其中 $B(F)=\{x\mid x\in F,\|x\|_1\leqslant 1\}$. 置

$$S^{2N}=\{Y=(y_1,\cdots,y_{2N})\mid\sum_{j=1}^{2N}|y_j|=2T_N\}.$$

任给 $Y\in S^{2N}$,构造$[-T_N,T_N]$的一组分点$\{x_k\}_{k=0}^{2N}$,其中 $x_0=-T_N$, $x_k=\sum_{j=1}^{k}|y_j|-T_N$. 由此定义

$$f_0(Y,x)=\operatorname{sgn}y_k\frac{1}{2}\min\{\omega(2x-2x_{k-1}),\omega(2x_k-2x)\},$$

$$x\in(x_{k-1},x_k),k=1,\cdots,2N.$$

记所有满足 $\int_{-T_N}^{T_N}f_0(Y,x)dx=0$ 的 $f_0(Y,x)$为 $Q_{2N,0}(\omega)$,它由对应于 $\sum_{k=1}^{2N}y_k=0$ 的 $f_0(Y,x)$组成. $r\geqslant1$ 时,定义

$$Q_{2N,r}(\omega)=\{f(Y,x)\mid f(Y,x)=a+\int_{-T_N}^{T_N}D_r(x-t)f_0(Y,t)dt,$$

$$a\in R,f_0(Y,t)\in Q_{2N,0}(\omega)\},$$

其中 $D_r(\cdot)$是以 $2T_N$ 为周期的 Bernoulli 核[6]. 由[6]知, $D_r^{(j)}(x)=D_{r-j}(x)$, $j=1,\cdots,r-1$ 以及 $f\in\widetilde{W}_1^r[-T_N,T_N]$(见引理 1)当且仅当

$$f(x)=a+\int_{-T_N}^{T_N}D_r(x-t)h(t)dt,h(t)=f^{(r)}(t),\int_{-T_N}^{T_N}h(t)dt=0\text{ 且 }\|h\|_{L[-T_N,T_N]}\leqslant1.$$

设$\{e_i\}_{i=1}^{K(\varepsilon,T_N)}$是 $L$ 的一组基,定义 $S^{2N-1}:=\{Y=(y_1,\cdots,y_{2N})\mid Y\in S^{2N},\sum_{j=1}^{2N}y_i=0\}$ 上的向量场 $T(Y)$:$\forall\ Y\in S^{2N-1}$,

$$T(Y)=(\int_{-T_N}^{T_N}D_1(T_N-t)f_0(t)dt,\cdots,\qquad\int_{-T_N}^{T_N}D_r(T_N-t)f_0(Y,t)dt,$$

$$\int_{-T_N}^{T_N}e_1(t)\operatorname{sgn}f(Y,t)dt,\cdots,\int_{-T_N}^{T_N}e_{K(\varepsilon,T_N)}(t)\operatorname{sgn}f(Y,t)dt,$$

显然 $T(Y)$是 $S^{2N-1}$ 上的连续奇向量场且 $r+K(\varepsilon,T_N)<2N-1$. 由 Borsuk 定理[6],存在 $Y_0\in S^{2N-1}$ 满足 $T(Y_0)=0\in R^{r+K(\varepsilon,T_N)}$. 由 $T(Y_0)$的前 $r$ 个分量为零知 $f^{(j)}(Y_0,T_N)=f^{(j)}(Y_0,-T_N)=0$, $j=0,\cdots,r-1$. 按如下方法延拓 $f(Y_o,\cdot)$至全实轴:$f(Y,x)=0,x\notin[-T_N,T_N]$. 因此,

$$f^{(r)}(Y_0,x)=\begin{cases}f(Y_0,x), & x\in[-T_N,T_N],\\ 0, & x\notin[-T_N,T_N].\end{cases}$$

注意到 $f_0(Y,x)\in H^\omega$([6]), $T_N<N$ 以及

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\omega_j(f^{(r)}(Y_0,x),t)=\sum_{(j-1,j)\cap(-T_N,T_N)\neq\varnothing}\omega_j(f^{(r)}(Y_0,x),t),$$

我们有 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\omega_j(f^{(r)}(Y_0,x),t)\leqslant2N\omega(t)$. 即$\frac{f(Y_0,x)}{2N}\in W^rH_{\infty,1}^{\omega}$.

根据 $T(Y_0)$的后 $K(\varepsilon,T_N)$个分量为零以及 $L_1$ 最佳逼近元判断据知

$$\inf_{g\in L}\|f(Y_0,\cdot)-g(\cdot)\|_{L_1[-T_N,T_N]}=\|f(Y_0,\cdot)\|_{L_1[-T_N,T_N]}.$$

由[12]并通过变量替换, $4\int_0^\beta\Phi_{\beta,r+1}(t)\omega'(t)dt\leqslant\frac{\|f(Y_0,\cdot)\|_{L_1[-T_N,T_N]}}{2T_N}$.

因此，$4\int_0^{\beta}\Phi_{\beta,r+1}(t)\omega'(t)dt \leqslant \inf\limits_{g\in L}\| f(y_0,\ \cdot)/(2N) - g(\cdot)\|_{L_1[-T_N,T_N]}$ 剩下过程同定理 1 之证，从略. 定理 2 证毕.

**注** 在周期情形类似于本文的结果分别由[13]和[11]建立.

作者感谢导师孙永生教授的指导和刘永平同志的帮助.

## 参 考 文 献

[1] Tikhomirov, V. M. , 数学进展, 19:4(1990), 449—451.

[2] Magaril—Iljaev, G. G. , Uspehi Mat. Nauk, 45:2(1991), 211—212.

[3] Chen Dirong, Chin. Ann. Math. , 13(B):4(1992), 396—405

[4] Liu Yongping, Approx. Theory Appl. , 8:4(1992), 79—88

[5] ————, Northeasterm Math. , J. 9:1(1993), 113—120.

[6] 考尼楚克, N. P. , 逼近论的极值问题(孙永生译), 上海科学技术出版社(1982).

[7] Schoenberg, I. J. , J. Approx. Theory, 6(1972), 404—420.

[8] Sun Yongsheng, Li Chun, Mat. Zametki, 48:4(1990), 100—109.

[9] Cavaretta, A. S. , Amer. Math, Mouth. , 81:5(1974), 480—486.

[10] Korneichuk, N. P. , Dokl, Akad. Nauk SSSR, 264:5(1982), 1063—1066.

[11] Sun Yongsheng. Li Chen, *Optimal recovery for* $W_2^r(R)$ *in* $L_2(R)$, Acta Math. Sinica (New Series), 7:4 (1991), 309—323.

[12] Ligun, A. A. , Mat. Zametki, 27:1(1980), 61—75.

[13] Ruban, V. N, Mat. Zametki, 15:3(1974), 387—392.

# Average $n$-widths of $W^rH^\omega$ Defined on Real Axis

*Chen Dirong*

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080 )

### Abstract

In this paper, the average $n$-widths of smooth functions for which the modulus of continuity of $r$th derivative is bounded above by a given concave modulus of continuity are obtained in the metric $L_\infty(R)$. Furthermore, the optimal subspaces are identified.