第14卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 3
1994年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1994

关于某类高阶非线性摄动微分方程的振荡定理*

韩效宥　　张建文　李庆仕
(山西经济管理学院，太原)　　(太原工业大学，030006)

摘　要　本文讨论了高阶非线性微分方程

$$(a(t)\varphi(x^{(n)})x')' - m(t)n(x)x' + Q(t,x) = P(t,x,x') \tag{1}$$

的解的振荡问题，给出了几个判定上述方程的解为振荡的充分准则.

关键词　高阶方程，振荡解.

一　引　言

在过去的三十多年里，关于非线性摄动微分方程的振荡理论已经有了很大的进展，见[1]—[7]等. 但对形如(1)的非线性高阶微分方程的振荡性结果却不多. 本文考虑了这种方程的振荡问题，给出了一组判定方程(1)为振荡的充分性定理. 在问题的讨论过程中，我们发现了Graef J. R. 等式[1]中的几个定理所给出的假设条件实质上是等价的，但由于[1]的作者未发现这些条件的等价性致使一些定理的证明过于繁杂，而且有的定理还附加了某些更强的条件. 例如[1]的定理12中条件(9)和(27)即

$$\begin{cases} \liminf\limits_{t\to\infty} \int_T^t (q(s) - p(s))ds \geqslant 0, \qquad \forall\, T \geqslant T_0, & (2) \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \int_T^t (q(s) - p(s))ds = \infty, \qquad \forall\, T \geqslant T_0 & (3) \end{cases}$$

等价于[1]中定理1的条件(6)即

$$\int_{t_0}^{\infty} (q(s) - p(s))ds = \infty, \tag{4}$$

其中T_0为某个很大的常数. 还有[1]的定理5除了与这里的(4)等价的条件(18)和(19)(见[1])以外，还另加了更强的条件(14)和(15)(见[1]). 这当然是没有必要的. 于是我们仔细研究证明了一些等价的条件，详细讨论见本文第二部分.

和一般文献一样，称方程(1)的一个解是振荡的，如果这个解有一个无界的零点集；称方程(1)是振荡的，如果该方程的一切延展于区间$t_0 \leqslant t < \infty$上的解是振荡的.

二　主要结果

关于方程(1)中的记号，我们有如下假设 $a, m: [t_0,\infty) \to (0,\infty)$；$n: R \to (0,\infty)$；$\varphi: R \to R$

* 1991年10月28日收到. 93年3月11日收到修改稿.

都是连续函数，其中 $m(t)$ 可微，$\varphi(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)>0$. $Q:[t_0,\infty)\times R\to R$，$P:[t_0,\infty)\times R^2\to R$ 是连续函数，并且总假设存在连续函数 $q,p:[t_0,\infty)\to R$ 及 $f:R\to R$ 使得

$$f'(x)\geqslant 0 \qquad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}, \tag{5}$$

$$xf(x)>0 \qquad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}, \tag{6}$$

$$Q(t,x)/f(x)\geqslant q(t), \quad P(t,x,x')/f(x)\leqslant p(t) \quad x\neq 0, \tag{7}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(s)}ds=\infty. \tag{8}$$

而对任何有限的 Lebesgue 测度集 E 上的积分

$$\int_E\frac{1}{a(s)}ds<\infty, \tag{9}$$

$$m'(t)\geqslant 0,\ 0\leqslant m(t)\leqslant M_1\ (M_1 \text{ 为常数}). \tag{10}$$

在引言中我们提出了有关[1]中所给部分条件的等价性，现给出如下

定理 1 设 $q(t),p(t)$ 为上述所给连续函数，则条件(4)与下列四个条件等价：

i) $$\liminf_{t\to\infty}\int_T^t(q(s)-p(s))ds\geqslant b(b>0)\ .\ \forall\ T\geqslant T_0. \tag{11}$$

ii) $$\liminf_{t\to\infty}\int_T^t(q(s)-p(s))ds\geqslant\lambda(\lambda>0)\quad \forall\ T\geqslant T_0, \tag{12}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t(q(s)-p(s))ds\geqslant C(C>0)\quad \forall\ T\geqslant T_0. \tag{13}$$

iii) 条件(12)成立，且存在序列 $\{T_n\}\to\infty$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T_n}^t(q(s)-p(s))ds=\infty\ (n \text{ 为自然数}). \tag{14}$$

iv) 条件(12)成立，且存在序列 $\{T_n\}\to\infty$ 使得

$$\limsup\frac{1}{t}\int_{T_n}^t\int_{T_n}^s(q(u)-p(u))duds=\infty. \tag{15}$$

这里 T_0 为很大的常数.

证明 我们的证明分下列五步进行：

(A) i)⇒ii). 如果 i)成立，即有(12)成立，由条件(11)必有一个 $t_1\geqslant T$，使得 $\int_T^{t_1}(q(s)-p(s))ds\geqslant b$；又因为 $\liminf_{t\to\infty}\int_{t_1}^t(q(s)-p(s))ds\geqslant b$，故存在 $t_2\geqslant t_1$，使得 $\int_{t_1}^{t_2}(q(s)-p(s))ds\geqslant b$；依次类推我们有 $t_n\geqslant t_{n-1}$ 使得

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}(q(s)-p(s))ds\geqslant b\quad(n=1,2,\cdots,n), \tag{16}$$

这里 $t_0=T$. 不妨设条件(13)中 $c\leqslant mb$（m 为自然数），对 $n=1,2,\cdots,m-1$. 求(16)的和，得 $\int_T^{t_{m-1}}(q(s)-p(s))ds\geqslant(m-1)b$. 因为 $\int_T^t(q(s)-p(s))ds=\int_T^{t_{m-1}}(q(s)-p(s))ds+\int_{t_{m-1}}^t(q(s)-p(s))ds$，所以 $\limsup_{t\to\infty}\int_T^t(q(s)-p(s))ds=\int_T^{t_{m-1}}(q(s)-p(s))ds+\limsup_{t\to\infty}\int_{t_{m-1}}^t(q(s)-p(s))ds\geqslant(m-1)b+\liminf_{t\to\infty}\int_{t_{m-1}}^t(q(s)-p(s))ds\geqslant mb\geqslant c$，故 ii)成立.

(B) ii)⇒iii). 由于 ii)与 iii)都有条件(12)，所以只需证明(14)成立即可，选取适合条件

(13)的 T,必有 $\tau_1\geqslant T$,使得 $\int_T^{\tau_1}(q(s)-p(s))ds\geqslant\frac{c}{2}$. 再由条件(13)知 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\int_{\tau_1}^t(q(s)-p(s))ds\geqslant c$, 又有 $\tau_2>\tau_1$ 使得 $\int_{\tau_1}^{\tau_2}(q(s)-p(s))ds\geqslant\frac{c}{3}$. 重复利用条件(13)可得

$$\int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n}(q(s)-p(s))ds\geqslant\frac{c}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{17}$$

这里 $\tau_0=T$,对[1]求和,有

$$\int_T^{\tau_n}(q(s)-p(s))ds\geqslant c\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}.\tag{18}$$

注意 $n\to\infty$时,$\tau_n\to\infty$,对(18)式取极限有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T^{\tau_n}(q(s)-p(s))ds\geqslant c\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\infty$,因此 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\int_T^t(q(s)-p(s))ds\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_T^{\tau_n}(q(s)-p(s))ds=\infty$. 即条件 iii)成立.

(C) iii)⇒iv). 同(B)一样我们只需证明(15)成立即可. 由(14)式,根据 L'Hospital 法则,有

$$\lim\sup\left(\frac{1}{t}\right)\int_{T_n}^t\int_{T_n}^s(q(u)-p(u))duds=\lim_{t\to\infty}\sup\int_{T_n}^t(q(s)-p(s))ds,\tag{19}$$

从而得到条件 iv)成立.

(D) iv)⇒(4). 若 iv)成立,令 $F(T,t)=\int_T^t(q(s)-p(s))ds$,根据(19)选取 $T\geqslant T_0$,存在 N,使 $T_N\geqslant T$. 由(14)式知对确定的数 $F(T,T_N)$,必有 $F(T,t)=F(T,T_N)+F(T_N,t)$,取上极限得

$$\lim\sup\int_T^t(q(s)-p(s))ds=F(T,T_N)+\lim_{t\to\infty}\sup\int_{T_N}^t(q(s)-p(s))ds=\infty.\tag{20}$$

以下证明条件(12)与(20)成立,必有(4)成立. 事实上, $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds=\infty$,则 $\int_{t_0}^\infty(q(s)-p(s))ds=\infty$. 现假设(4)不成立,则 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds<\infty$. 不妨设 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds<d$ (常数),对于 $T\geqslant T_0$ 由(20)式知,总可以找到一个 $T_1\geqslant T$,使 $\int_{t_0}^{T_1}(q(s)-p(s))ds>\lambda+d$. 而 $\int_{T_1}^t(q(s)-p(s))ds=\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds-\int_{t_0}^{T_1}(q(s)-p(s))ds\leqslant\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds-(\lambda+d)$,故 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{T_1}^t(q(s)-p(s))ds\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{t_0}^t(q(s)-p(s))ds+\lim\limits_{t\to\infty}\sup\{-(\lambda+d)\}<d-(\lambda+d)\leqslant-\lambda$. 这与条件(12)相矛盾. 所以条件(4)成立.

(E) (4)⇒i). 显然.

注 定理 1 使我们在以后的讨论问题时避免出现重复的叙述.

定理 2 设条件(4)—(10)成立,并且有常数 M_2,M_3 使

$$\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{n(x)}{f(x)}dx<M_2\qquad(\varepsilon>0),\tag{21}$$

$$\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{n(x)}{f(x)}dx<M_2\qquad(\varepsilon>0),\tag{22}$$

则方程(1)的一切延展于区间 $t_0\leqslant t\leqslant\infty$ 上的解是振荡的.

证明 设 $x(t)$是方程(1)的非振荡解,则存在 $t_1>t_0$,若 $t>t_1$ 时,$x(t)\neq0$. 因为

$$(a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)))' = (a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t))'/f(x(t))$$
$$- a(t)\varphi(x^{(n)}(t))(x'(t))^2 f'(x(t))/f^2(x(t))$$
$$\leqslant -(q(t) - p(t)) + m(t)n(x(t))x'(t)/f(x(t)).$$

当 $t>t_1$ 时，积分上式，并注意到(10)，(21)，(22)得

$$a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x(t)/f(x(t)) \leqslant A_1 - \int_{t_1}^{t}(q(s) - p(s))ds + \int_{t_1}^{t}[m(s)n(x(s))/f(x(s))]dx(s)$$
$$\leqslant A_1 - \int_{t_1}^{t}(q(s) - p(s))ds + m(t)G(x(t)) - m(t_1)G(x(t_1)) - \int_{t_1}^{t}G(x(s))m'(s)ds$$
$$\leqslant A_1 + M_1(M_2 + M_3) - \int_{t_1}^{t}(q(s) - p(s))ds,$$

这里 A_1 为常数，$G(v) = \int_0^v \frac{n(x)}{f(x)}$. 由条件(4)得 $\lim\limits_{t\to\infty}(a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)) = -\infty$，故存在 $T_0>t_1$，当 $t\geqslant T_0$ 时，有 $x^{(n)}(t)\neq 0$；$x(t)$ 与 $x'(t)$ 异号，不妨设 $x(t)>0, x'(t)<0$ ($x(t)<0, x'(t)>0$ 的情形证明类似). 条件(4)隐含(见[1])存在 $T_1>T_0$，当 $t\geqslant T_1$ 时，有

$$\int_{T_0}^{T_1}(q(s) - p(s))ds = 0 \text{ 和} \int_{T_1}^{t}(q(s) - p(s))ds \geqslant 0.$$

积分方程(1)并代入已知条件，由分部积分得

$$a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t) \leqslant a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1) - \int_{T_1}^{t}f(x(s))(q(s) - p(s))ds$$
$$= a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1) - f(x(t))\int_{T_1}^{t}(q(s) - p(s))ds$$
$$+ \int_{T_1}^{t}f'(x(s))x'(s)\int_{T_1}^{s}(q(u) - p(u))duds \leqslant a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1) = B < 0.$$

根据达布定理知当 $t\geqslant T_1$ 时，$x^{(n)}(t)$ 不变号. 设在 $[T,\infty)$ 上使 $\varphi(x^{(n)}(t))>C>0$ 的集为 E_1，使 $\varphi(x^{(n)}(t))\leqslant C$ 的集为 E_2，由于 $\int_{E_1}\frac{ds}{a(s)} + \int_{E_2}\frac{ds}{a(s)} = \int_{T_1}^{\infty}\frac{ds}{a(s)} = \infty$，则

1) 如果 $\int_{E_2}\frac{ds}{a(s)} = \infty$，因 $x'(t)\leqslant B/a(t)\varphi(x^{(n)}(t))$

$$x(t) \leqslant x(T_1) + \int_{T_1}^{t}[B/a(s)\varphi(x^{(n)}(s))]ds \leqslant x(T_1) + \frac{B}{C}\int_{E_2\cap[T_1,t]}\frac{ds}{a(s)},$$

于是 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = -\infty$ 这和 $x(t)>0$ 的假设相矛盾.

2) 如果 $\int_{E_1}\frac{1}{a(s)}ds = \infty$，知 $\mathrm{mes}(E_1)=\infty$，因当 $t\geqslant T_1$ 时，$x^{(n)}(t)$ 保持恒号. 若 $x^{(n)}(t)>0$，则存在 $\delta(T_1)>0$，使当 $t\in E_1$ 时有 $x^{(n)}(t)>\delta(T_1)>0$. 这时

$$x^{(n-1)}(t) - x^{(n-1)}(T_1) = \int_{T_1}^{t}x^{(n)}(s)ds \geqslant \int_{E_1\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds > \int_{E_1\cap[T,t]}\delta(T_1)ds.$$

当 $t\to\infty$ 时，$x^{(n-1)}(t)\to\infty$，于是有 $T_2\geqslant T_1$，当 $t\geqslant T_2$ 时，$x^{(n-1)}(t)\geqslant C_1>0$，由 $x^{(n-2)}(t)-x^{(n-2)}(T_2)\geqslant C_1(t-T_2)$ 知，当 $t\to\infty$ 时，$x^{(n-2)}(t)\to\infty$，故存在 $T_3\geqslant T_2$，当 $t\geqslant T_3$ 时，有 $x^{(n-2)}(t)>C_2>0$. 依次类推，可知 $\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=\infty$ 与 $x'(t)<0$ 相矛盾. 若 $x^{(n)}(t)<0$，则存在 $\eta(T_1)>0$，使当 $t\in E_1$ 时，有 $x^{(n)}(t)<-\eta(T_1)$ 于是由

$$x^{(n-1)}(t)-x^{(n-1)}(T_1)=\int_{T_1}^{t}x^{(n)}(s)ds\leqslant\int_{E_1\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds\leqslant\int_{E_1\cap[T,t]}-\eta(T_1)ds.$$

可知，当 $t\to\infty$ 时，$x^{(n-1)}(t)\to-\infty$，由此，有 $T_2\geqslant T_1$ 当 $t\geqslant T_2'$ 时，有 $x^{(n-1)}(t)\leqslant C_1'<0$，同样的理由可推得 $x(t)<C_n'<0$，这又是一个矛盾．所以方程(1)的一切延展于$[t_0,\infty)$上的解为振荡的．

从上述定理1和定理2容易得出如下

推论 假设方程(1)满足条件(5)－(10)，(21)和(22)．如果定理1的条件i)，ii)，iii)，iv)中之一成立，那么方程(1)是振荡的．

注 定理2及推论包含了[1]的定理1，定理5，定理12；[2]的定理1；[3]中§2的定理1．

为了方便起见，以下定理我们假设方程(1)中 $m(t)\equiv0$ 或 $n(x)\equiv0$．

定理3 设条件(6)－(9)成立，并且有

1) $\liminf\limits_{t\to\infty}\int_T^t(q(s)-p(s))ds>0\quad\forall\ T\geqslant T_e$，其中 T_e 为某个很大的常数； (23)

2) $\int_{t_0}^{\infty}(q(s)-p(s))ds<\infty$； (24)

3) $f'(x)\geqslant k>0,\quad f''(x)\geqslant0$，当 $x\neq0$ 时； (25)

4) 存在可微正函数 $R(t)$，使得

$$R'(t)\leqslant R(t)/T, \tag{26}$$

$$0\leqslant R'(t)\leqslant M_4\quad(M_4\text{ 为常数}), \tag{27}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}R(s)(q(s)-p(s))ds=\infty \tag{28}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}(a(s)R'^2(s)/R(s))ds<\infty, \tag{29}$$

则方程(1)的一切延展于区间$[t_0,\infty)$上的解是振荡的．

证明 设 $x(t)$ 是方程(1)的任何一个可延拓的非振荡解．则存在 $t_1>t_0$，发 $t\geqslant t_1$ 时，$x(t)\neq0$．不妨设 $x(t)>0$（$x(t)<0$ 的情形证明类似），由于

$$\begin{aligned}(R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)))'&=R(t)(a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t))'/f(x(t))\\&\quad+R'(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))-R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'^2(t)f'(x(t))/f^2(x(t))\\&\leqslant-R(t)(q(t)-p(t))+a(t)R'(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\\&\quad-a(t)R(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'^2(t)f'(x(t))/f^2(x(t))\\&\leqslant-R(t)(q(t)-p(t))+a(t)\varphi(x^{(n)}(t))R'^2(t)/4R(t)f'(x(t)).\end{aligned} \tag{30}$$

同定理2中一样，假设 $\varphi(x^{(n)}(t))$ 在$[t_1,\infty)$上使得 $\varphi(x^{(n)}(t))>C>0$ 的集为 E_1，使 $\varphi(x^{(n)}(t))\leqslant C$ 的集为 E_2．从 t_1 到 t 积分上式得

$$\begin{aligned}R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))&\leqslant A_2-\int_{t_1}^{t}R(s)(q(s)-p(s))ds\\&+\int_{E_1\cap[t_1,t]}(R'(s)a(s)\varphi(x^{(n)}(s))x'(s)/f(x(s)))ds\\&+\int_{E_2\cap[t_1,t]}(a(s)\varphi(x^{(n)}(s))R'^2(s)/4KR(s))ds,\end{aligned}$$

A_2 为常数，又因

$$(a(t)\varphi(x^{(n)}(t))/f(x(t)))'\leqslant-(q(t)-p(t)) \tag{31}$$

当 $t>t_1$ 时，积分上式得 $a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\leqslant A_3-\int_{t_1}^{t}(q(s)-p(s))ds$，$A_3$ 为常数，再利用(25)得存在常数 $M_5>0$，使

$$a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\leqslant M_5,\tag{32}$$

若 $\mathrm{mes}(E_1)<\infty$ 时，注意到条件(27)－(29)，(32)得

$$R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\leqslant A_3-\int_{t_1}^{t}R(s)(q(s)-p(s))ds+M_4M_5\,\mathrm{mes}(E_1)$$
$$+\frac{C}{4K}\int_{E_2\cap[t_1,t]}(a(s)R'^2(s)/R(s))ds.$$

从而有 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))=-\infty$，故存在充分大的 $T_0>t_1$，当 $t\geqslant T_0$ 时，有 $x'(t)<0$，$x^{(n)}(t)$不变号. 条件(23)暗含(见[4])对于任何 T_0 满足 $T_0\geqslant t_0$，存在 $T_1>T_0$，使得当 $t\geqslant T_1$ 时 $\int_{T_1}^{t}(q(s)-p(s))ds\geqslant 0$. 而由方程(1)有 $(a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t))'\leqslant-(q(t)-p(t))f(x(t))$. 当 $t>T_1$ 时积分上式，再利用分部积分得

$$a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)\leqslant a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1)-\int_{T_1}^{t}(q(s)-p(s))f(x(s))ds$$
$$\leqslant a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1)-f(x(t))\int_{T_1}^{t}(q(s)-p(s))ds$$
$$+\int_{T_1}^{t}f'(x(s))x'(s)\int_{T_1}^{s}(q(u)-p(u))duds$$
$$\leqslant a(T_1)\varphi(x^{(n)}(T_1))x'(T_1)=L<0.$$

于是，由已知条件

$$x(t)\leqslant x(T_1)+\int_{T_1}^{t}(L/a(s)\varphi(x^{(n)}(s)))ds\leqslant x(T_1)+\int_{E_2\cap[T_1,t]}(L/a(s)\varphi(x^{(n)}(s)))ds$$
$$\leqslant x(T_1)+(\frac{L}{C})\int_{E_2\cap[T_1,t]}(1/a(s))ds.$$

由假设 $\mathrm{mes}(E_1)<\infty$，及条件(8)，(9)知 $\int_{E_2}(1/a(s))ds=\infty$，从而有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=-\infty$，这和 $x(t)>0$ 的假设相矛盾. 若 $\mathrm{mes}(E_1)=\infty$，根据已知条件可得 $x^{(n)}(t)$非振荡的. 如若不然，则存在$\{c_n\}\to\infty$，使 $x^{(n)}(c_n)=0$，即有 $\varphi(x^{(n)}(c_n))=0$. 选取 N 充分大使(23)成立，当 $t>C_N$ 时，积分(31)得

$$a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\leqslant-\int_{C_N}^{t}(q(s)-p(s))ds.$$

对上式取上极限，注意到(23)有

$$\lim_{t\to\infty}\sup a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t))\leqslant-\lim_{t\to\infty}\inf\int_{C_N}^{t}(q(s)-p(s))ds<0,$$

这个矛盾说明存在 $T>t_1$，当 $t>T$ 时，$x^{(n)}(t)\neq 0$，即得 $x^{(n)}(t)$不变号. 若此时设 $x^{(n)}(t)>0$，由 E_1 的假设可得，当 $t\in E_1$ 时，存在 $\delta(T)>0$，使 $x^{(n)}(t)>\delta(T)$，这样当 $t>T$ 时

$$x^{(n-1)}(t)=x^{(n-1)}(T)+\int_{T}^{t}x^{(n)}(s)ds\geqslant x^{(n-1)}(T)+\int_{E_1\cap[T,t]}\delta(T)ds,$$

所以$\lim\limits_{t\to\infty}x^{(n-1)}(t)=\infty$，即存在 $T_1>T$，当 $t>T_1$ 时，有 $x^{(n-1)}(t)>C_1>0$. 同理可得

$$x^{(n-2)}(t)>C_1t+C_2,$$

$$x^{(n-3)}(t) > C_1' t^2 + C_2' + C_3',$$

$$\cdots\cdots$$

$$x'(t) > C_1^{n-3} t^{n-2} + C_1^{n-3} t^{n-3} + \cdots + C_{n-1}^{n-3},$$

其中 $c_1^{n-3}>0$，从而有 $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = \infty$．由 $x'(t)$ 与 $f'(x(t))$ 的单调性得

$$f(x(t)) - f(x(T_1)) = \int_{T_1}^{t} f'(x(s))x'(s)ds \leqslant f'(x(t))x'(t)(t - T_1)$$
$$\leqslant f'(x(t))x'(t)t - kx'(t)T_1.$$

再由(33)知存在 $T_2>T_1$，当 $t>T_2$ 时，$f(x(T_1))\leqslant kx'(t)T_1$，即有 $f(x(t))\leqslant f'(x(t))x'(t)t$．又因为 $f(x(t))>0$，所以当有 $t>T_2$ 时，$f'(x(t))x'(t)t/f(x(t))\geqslant 1$．另外由(30)，当 $t>T_2>t_1$ 时，同时注意到(26)及上面不等式有

$$(R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)))' \leqslant - R(t)(q(t) - p(t))$$
$$+ a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)(R'(t) - R(t)f'(x(t))x'(t)/f(x(t)))/f(x(t))$$
$$\leqslant - R(t)(q(t) - p(t)) + a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)(R'(t) - R(t)/t)/f(x(t))$$
$$\leqslant - R(t)(q(t) - p(t)).$$

积分上式得 $R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)) \leqslant A_4 - \int_{T_2}^{t} R(s)(q(s) - p(s))ds$．$A_4$ 为常数，由(28)式得 $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)a(t)\varphi(x^{(n)}(t))x'(t)/f(x(t)) = -\infty$．这与 $x'(t)>0$ 相矛盾．如果 $x^{(n)}(t)<0$，同样存在 $\eta(T)>0$，当 $t\in E_1$ 时，$x^{(n)}(t)<-\eta(T)<0$，这时当 $t>T$ 时，有

$$x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(T) + \int_T^t x^{(n)}(s)ds \leqslant x^{(n-1)}(T) + \int_{E_1\cap[T,t]} - \eta(T)ds.$$

所以 $\lim\limits_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t)=-\infty$，即存在 $T_1'>T$，当 $t>T_1'$ 时，$x^{(n-1)}(t)<\overline{C}_1<0$，同理可得

$$x^{(n-2)}(t) \leqslant \overline{C}_1 t + \overline{C}_2$$
$$x^{(n-3)}(t) \leqslant \overline{C}_1' t^2 + \overline{C}_2' t + \overline{C}_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$x(t) < \overline{C}_1^{n-2} t^{n-1} + \overline{C}_2^{n-2} t^{n-2} + \cdots + \overline{C}_n^{n-2}$$

其中 $\overline{C}_1^{n-2}<0$，这样 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=-\infty$．与假设 $x(t)>0$ 相矛盾．定理证毕．

三　实　例

例 1　考虑方程

$$(\mathrm{sh}(x^{(100)})x')' - tx^2x'e^{-x^2}/(1 + t) + (\frac{1}{2} + \sin t + t^2x^2)x$$
$$= (\cos t)x^5(\sin x')/(tx^4 + t) \quad t \geqslant 1. \tag{34}$$

选取 $f(x)=x$，我们有 $Q(t,x)/x\geqslant\frac{1}{2}+\sin t$，$P(t,x,x')/x\leqslant\frac{1}{t}$，另外 $m(t)=t/(1+t)$，$n(x)=x^2e^{-x^2}$，定理 2 的其它条件全部满足，从而得方程(34)的一切解是振荡的．这是其它振荡准则无法判定的．

例 2　考虑方程

$$((x''')^2x')' + (2/t^2 + 1/2t^{\frac{3}{2}} + \cos t/\sqrt{t} - \sin t/2t^{\frac{3}{2}})(x + e^x - 1)$$
$$= (1 - x - e^x)t^2(x')^2 \cdot \quad t \geqslant 1.$$

选取 $f(x)=x+e^x-1$，显然满足条件(6)，(7)，(25)，因为 $Q(t,x)/(x+e^x-1)\geqslant 2/t^2+1/2t^{\frac{3}{2}}+\cos t/\sqrt{t}-\sin t/2t^{\frac{3}{2}}$，$P(t,x,x')/(x+e^x-1)\leqslant 0$ 及 $a(t)\equiv 1$，从而条件(8)，(9)，(23)，(24)满足. 取 $R(t)=\sqrt{t}$，定理 3 剩余的条件(26)－(29)满足，由定理 3 知所给方程是振荡的.

在本文的完成过程中，得到陈庆益教授的支持和热情关注，深表谢意.

参 考 文 献

[1] J. R. Graef, S. M. Rankin, P. W. Spikess, *Oscillation theorems for perturbed nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 1978, 65: 375—390.

[2] S. R. Grace, B. S. Lalli, *Oscillation theorems for certain second order perturbed nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 1980, 77: 205—214.

[3] 李志深、韩效宥，某类非线性扰动微分方程的振荡定理，兰州大学学报(自然科学版)，1986，22(3)：15—28.

[4] L. Erbe, *Oscillation theorems for second order linear differential eqution*, Pacific. J. Math, 1970, 35: 337—343.

[5] S. R. Grace, B. S. Lalli, *Oscillation theorems for nth order delay differential equation*, J. Math. Anal. Appl., 1983, 91: 352—366.

[6] S. R. Grace, B. S. Lalli, *Oscillatory and asymptotic behavior of solutions of differential equations with deviating arguments*, J. Math. Anal. Appl., 1984, 104: 79—94.

[7] S. R. Grace, *On the oscillatory and asymptotic behavior of even order nonlinear differential equations with retarded arguments*, J. Math. Anal. Appl., 1989, 137: 528—540.

Oscillation Theorems for Some Higher Order Perturbed Nonlinear Differential Equations

Han Xiaoyou *Zhang Jianwen* *Li Qingshi*

(Shaxi Ecnomic Management College) (Taiyuan University of Technology)

Abstract

In this paper, obtain some oscillation theorems for the solutions of certain nonlinear differential equation

$$(a(t)\varphi(x^n)x')' - m(t)n(x)x' + Q(t,x) = P(t,x,x').$$