第14卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 3
1994年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1994

间接控制系统部分变元的绝对稳定性*

余国栋
(贵州教育学院数学系，贵阳 550003)

摘　要　i)对变量分离型间接控制系统，本文给出其平凡解关于部分变元绝对稳定的充要条件. ii)对非变量分离型间接控制系统，给出其平凡解关于部分变元绝对稳定的充分条件.

关键词　间接控制系统，变量分离型间接控制系统，部分变元的绝对稳定性，关于流形的绝对稳定性.

一

动态系统关于部分变元的稳定性的研究具有重要意义. 一方面，有时我们仅对部分稳定性感兴趣，一方面，也是由于有时与动态过程有关的稳定性问题无法同时涉及全体变元. 在研究台里叶间接控制系统的绝对稳定性时，文[1]引进了部分变元绝对稳定性的概念，得到了间接控制系统绝对稳定的充要条件. 利用文[1]的思想，本文考虑间接控制系统关于部分变元绝对稳定的问题. 对变量分离型系统，得到了它的平凡解关于部分变元绝对稳定的充要条件，对非变量分离型系统，得到其平凡解关于部分变元绝对稳定的充分条件，所得结果的条件较弱，从而使用范围较广，并且也较便于使用.

二

为方便计，采用以下记号：

$$\forall\ \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{n+1})^T\in R^{n+1},\ \beta_{[j]}\stackrel{\triangle}{=}(\beta_j,\cdots,\beta_{n+1})^T,\ 1\leqslant j<n+1.$$

$$S\stackrel{\triangle}{=}\{\beta\,|\,\beta\in R^{n+1},B_{[j]}=0\}.$$

$$m\stackrel{\triangle}{=}\{f\,|\,f(0)=0,\sigma f(\sigma)>0,\text{当 }\sigma\neq 0,f(\sigma)\in C(-\infty,+\infty))\}.$$

$O_{s\times t}$ 表示 $s\times t$ 阶零矩阵，在不会混淆的场合，略去下标，$E_{[j]}=\mathrm{diag}(\overbrace{0\ \cdots\ 0}^{j-1}\ \overbrace{1\ \cdots\ 1}^{n-j+2})$.

设有变量分离型间接控制系统：

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}y_j+h_if(y_{n+1}),\tag{1}$$

* 1991年12月24日收到.

其中 $a_{ij}, h_i (i,j=1,2,\cdots,n+1)$ 是实常数，$f\in\mathfrak{M}$.

利用(1)的系数作线性方程组：

$$\frac{dy}{dt}=By,\qquad B=(b_{ij})_{(n+1)\times(n+1)},\tag{2}$$

这里 $b_{ij}=\begin{cases}a_{i,n+1}+h_i, & i=1,2,\cdots,n+1; j=n+1,\\ a_{ij}, & i=1,2,\cdots,n+1, j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$

引理[2] 系统(2)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 渐近稳定的充要条件是：矩阵 B 的所有非负实部特征根所对应的全体根向量属于集合 S.

定理 1 系统(1)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定的充要条件是：

i) 系统(1)的平凡解关于部分变元 y_{n+1} 绝对稳定；

ii) 矩阵 B 的所有非负实部特征根所对应的全体根向量属于集合 S.

证明 *必要性* 系统(1)的平凡解对 $y_{[j]}$ 绝对稳定包含对 y_{n+1} 的绝对稳定性. 所以 i)成立. 令 $f(y_{n+1})=y_{n+1}$，则系统(1)化为线性系统(2). 根据引理，知条件 ii)也成立.

充分性 将系统(1)改写为

$$\frac{dy}{dt}=By+h[f(y_{n+1})-y_{n+1}],\tag{3}$$

记 $y(t)=y(t,t_0,y_0)$，由 Lagrange 常数变易公式：

$$y(t)=e^{B(t-t_0)}y_0+\int_{t_0}^{t}e^{B(t-\tau)}h[f(y_{n+1}(\tau))-y_{n+1}(\tau)]d\tau.\tag{4}$$

设矩阵 B 的特征矩阵 $B-\lambda E$ 的所有初等因子为：

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_r)^{n_r},\ \sum_{i=1}^{n+1}n_i=n+1.$$

1° 先考虑 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 都是实数的情况.

设 $\lambda_i<0$，当 $1\leqslant i\leqslant d$；$\lambda_i\geqslant 0$，当 $d+1\leqslant i\leqslant r$. 熟知，有 $(n+1)\times(n+1)$ 阶满秩阵 T 存在，使得

$$e^{B(t-t_0)}=T\begin{pmatrix}J_1(t-t_0) & 0\\ 0 & J_2(t-t_0)\end{pmatrix}T^{-1},\tag{5}$$

其中

$$J_1(t-t_0)=\mathrm{diag}(B_1(t-t_0),\cdots,B_d(t-t_0)),$$
$$J_2(t-t_0)=\mathrm{diag}(B_{d+1}(t-t_0),\cdots,B_r(t-t_0)),$$
$$B_i(t-t_0)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_i(t-t_0)} & \cdots & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}e^{\lambda_i(t-t_0)}\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i(t-t_0)}\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$T=(\cdots,h_1^{(i)},\cdots,h_{n_i}^{(i)},\cdots)$，$h_s^{(i)}\in R^{n+1}$，$1\leqslant i\leqslant r$，$1\leqslant s\leqslant n_i$. 并且 $h_1^{(i)},\cdots,h_{n_i}^{(i)}$ 就是 B 的与 λ_i 对应的根向量. 由于 λ_i 是实的，这些根向量都可以取为实的，按定理条件 ii)：

$$h_s^{(i)}=(h_1^{(i)},\cdots,h_{s,j-1}^{(i)},\overbrace{0,\cdots,0}^{n-j+2})^T,\ i=d+1,\cdots,r,\ s=1,\cdots,n_i.$$

由根向量的线性无关性，知有 $\sum\limits_{i=d+1}^{r}n_i=p\leqslant j-1$.

再记 $h_s^{(i)} = (h_{s1}^{(i)}, \cdots, h_{s,j-1}^{(i)}, h_{s,j}^{(i)}, \cdots, h_{s,n+1}^{(i)})^T, i = 1, \cdots, d, s = 1, \cdots, n_i$. 那么

$$T = \left(\begin{array}{ccc:ccc} h_{11}^{(1)} & \cdots & h_{n_d,1}^{(d)} & h_{1,1}^{(d+1)} & \cdots & h_{n_r,1}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1,j-1}^{(1)} & \cdots & h_{n_d,j-1}^{(d)} & h_{1,j-1}^{(d+1)} & \cdots & h_{n_r,j-1}^{(r)} \\ \hdashline h_{1,j}^{(1)} & \cdots & h_{n_d,j}^{(d)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1,(n+1)}^{(1)} & \cdots & h_{n_d,n+1}^{(d)} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} H_{(j-1)\times(n+1-p)} & M_{(j-1)\times p} \\ & \\ N_{(n-j+2)\times(n+1-p)} & O_{(n-j+2)\times p} \end{pmatrix} \tag{6}$$

将(5),(6)代入(4),得

$$y(t) = \begin{pmatrix} HJ_1(t-t_0) & MJ_2(t-t_0) \\ NJ_1(t-t_0) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}y + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} HJ_1(t-\tau) & MJ_2(t-\tau) \\ NJ_1(t-\tau) & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times T^{-1}h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)]d\tau.$$

于是有

$$E_{[j]}y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ NJ_1(t-t_0) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ NJ_1(t-\tau) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)]d\tau \tag{7}$$

因为 $\lambda_i<0$ $(i=1,\cdots,d)$,故存在 $a>0, c>0$ 使

$$\| NJ_1(t-t_0) \| \leqslant ce^{-a(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0. \tag{8}$$

由于系统对 y_{n+1} 绝对稳定,$f(y_{n+1})$ 是 y_{n+1} 的连续函数,所以 $y_{n+1}(t)\to 0(t\to+\infty)$,$f(y_{n+1}(t))\to 0(t\to+\infty)$,于是对$\forall\ \varepsilon>0$,存在 $t_1>t_0$,当 $t\geqslant t_1$ 时,

$$\int_{t_1}^{t} ce^{-a(t-\tau)} \| T^{-1} \| \ \| h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)] \| d\tau < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

由于 $f(y_{n+1}(t))$ 及 $y_{n+1}(t)$ 连续依赖于始值 y_0,知存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$,当 $\| y_0 \| <\delta$ 时,对 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$,有

$$\int_{t_1}^{t_1} ce^{-a(t-\tau)} \| T^{-1} \| \ \| h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)] \| d\tau < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

取 $\delta_2(\varepsilon)=\varepsilon/3c \| T^{-1} \|$,当 $\| y_0 \| <\delta_2$ 时,

$$ce^{-a(t-t_0)} \| T^{-1} \| \ \| y_0 \| < \varepsilon/3, \quad t \geqslant t_0. \tag{11}$$

现取 $\delta(\varepsilon)=\min(\delta_1,\delta_2)$,由(7)-(11),当 $\| y_0 \| <\delta$ 时有

$$\begin{aligned} \| y_{[j]} \| &\leqslant ce^{-a(t-\tau)} \| T^{-1} \| \ \| y_0 \| + \int_{t_0}^{t} ce^{-a(t-t_0)} \| T^{-1} \| \ \| h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)] \| d\tau \\ &= ce^{-a(t-\tau)} \| T^{-1} \| \ \| y_0 \| + \int_{t_0}^{t_1} ce^{-a(t-\tau)} \| T^{-1} \| \ \| h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)] \| d\tau \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} ce^{-a(t-t_0)} \| T^{-1} \| \ \| h[f(y_{n+1}(\tau)) - y_{n+1}(\tau)] \| d\tau \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以(1)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 稳定.

$\forall\ y_0 = R^{n+1}$,利用 L'Hopital 法则.

$$0 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \| y_{[j]} \| \leqslant \lim_{t\to+\infty} ce^{-a(t-t_0)} \| T^{-1} \| \ \| y_0 \|$$

$$+\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t} ce^{-\alpha(t-\tau)}\,\|T^{-1}\|\;\|h[f(y_{n+1}(\tau))-y_{n+1}(\tau)]\|\,d\tau$$

$$=0+\lim_{t\to+\infty}\frac{c\,\|T^{-1}\|}{e^{\alpha t}}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau}\,\|h[f(y_{n+1}(\tau))-y_{n+1}(\tau)]\|\,d\tau$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{c\,\|T^{-1}\|\,e^{\alpha t}\,\|h[f(y_{n+1}(\tau))-y_{n+1}(\tau)]\|}{\alpha e^{\alpha t}}=0.$$

于是系统(1)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定.

2° 若 B 的特征根不全为实数. 比如说, $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j\,(\beta_j\neq0)$, 对应有初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$. 则 $\bar\lambda_j=\alpha_j-i\beta_j$ 也是 B 的特征根, 对应有初等因子: $(\lambda-\bar\lambda_j)^{n_j}$. 设 $h_1^{(j)},\cdots,h_{n_j}^{(j)}$ 是与 λ_j 对应的根向量, 则 $\bar h_1^j,\cdots,\bar h_{n_j}^{(j)}$ 便是与 $\bar\lambda_j$ 对应的根向量, 于是存在满秩阵 $T^*=(\cdots,\xi_1^{(j)},\cdots,\xi_{2n_j}^{(j)},\cdots)$, 使得

$$e^{B(t-t_0)}=T^*\operatorname{diag}(B_1(t-t_0),\cdots,B_j(t-t_0),\cdots,B_s(t-t_0)),$$

其中

$$B_j(t-t_0)=e^{\alpha_j(t-t_0)}\begin{pmatrix} D_2 & (t-t_0)D_2 & \cdots & \cdots & \dfrac{(t-t_0)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}D_2\\ 0 & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & (t-t_0)D_2\\ 0 & & \cdots & 0 & D_2\end{pmatrix}_{2n_j\times 2n_j},$$

$$D_2=\begin{pmatrix}\cos\beta_j(t-t_0) & \sin\beta_j(t-t_0)\\ -\sin\beta_j(t-t_0) & \cos\beta_j(t-t_6)\end{pmatrix},$$

$$\xi_{2m-1}^{(j)}=(h_m^{(j)}+\bar h_m^{(j)})/2,\quad \xi_{2m}^{(j)}=(h_m^{(j)}-\bar h_m^{(j)})/i,\ m=1,\cdots,n_j.$$

所以, $\xi_1^{(j)},\cdots,h_{2n_j}^{(j)}$ 虽不是 λ_j 和 $\bar\lambda_j$ 对应的根向量, 但却是它们的线性组合. 故仍有性质: 当 $\alpha_j\geqslant0$ 时, 它们属于集合 S. 于是与 1° 一样可证, 系统(1)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定. □

实用上下列等价形式是方便的.

推论 系统(1)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定的充要条件是:

i) 系统(1)的平凡解关于部分变元 y_{n+1} 绝对稳定;

ii) 系统(2)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 渐近稳定.

利用判定线性系统(2)关于部分变元 $y_{[j]}$ 渐近稳定的各种判别法, 就可以导出系统(1)关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定的各种充分条件.

下面考虑间接控制系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde a_{ij}x_j,\\[2mm] \dfrac{dx_{n+1}}{dt}=f(\sigma),\quad \sigma=\sum\limits_{j=1}^{n+1}c_jx_j,\end{cases}\tag{12}$$

其中 $a_{ij},c_j\,(i,j=1,2,\cdots,n+1)$ 是常数, $c_{n+1}\neq0$, $f\in\mathfrak{m}$.

记 $K=\{x\,|\,x=(x_1,\cdots,x_{n+1})^T\in R^{n+1},\sigma=\sum\limits_{j=1}^{n+1}c_jx_j=0\}$, $\rho(x,K)=|\sigma|$.

定义[3] 称(12)的平凡解关于流形 K 绝对稳定, 若对任给 $f\in\mathfrak{M}$, $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$ 时 $\rho(x(t),K)<\varepsilon$, 且对任意 $x_0\in R^{n+1}$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(x(t),K)=0$ $(x(t)=x(t,t_0,$

x_0)).

令 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$，$\tilde{b}_{ij}=\tilde{a}_{ij}\,(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n+1)$，$\tilde{b}_{ij}=c_j(i=n+1,j=1,\cdots,n+1)$.

定理 2 如果 i)系统(12)的平凡解关于流形 K 绝对稳定；ii)矩阵 $\tilde{B}$ 的所有非负实部特征根所对应的全体根向量属于集合 S，则系统(12)的平凡解关于部分变元 $y_{[j]}$ 绝对稳定.

证明同定理 1 的充分性部分，略.

利用 $\tilde{B}$ 作一线性系统

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{B}x, \tag{13}$$

则有以下推论.

推论 如果(12)的平凡解关于流形 K 绝对稳定；ii)(13)的平凡解为 $x_{[j]}$-渐近稳定，则系统(12)的平凡解关于部分变元 $x_{[j]}$ 绝对稳定.

注 以上定理可推广至多个非线性调节机构的情形.

三

设有间接控制系统.

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+2x_3+f(\sigma),\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1,\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt}=-x_1,\\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt}=-x_1-\rho f(\sigma),\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\rho>0$，$f\in\mathfrak{M}$，$\int_0^{+\infty}f(\sigma)d\sigma=+\infty$. 现考虑系统的绝对稳定性.

取 $V=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+x_3^2+\int_0^{\sigma}f(\sigma)d\sigma$，有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(15)}=x_1(x_2+2x_3+f(\sigma))+x_2(-x_1)+2x_3(-x_1)+f(\sigma)(-x_1-\rho f(\sigma))$$
$$=-\rho f^2(\sigma)<0,\ 当\ \sigma\neq 0.$$

所以系统(15)的平凡解关于部分变元 σ 绝对稳定.

当 $f(\sigma)=\sigma$ 时，(15)化为线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+2x_3+\sigma,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1,\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt}=-x_1,\\[2mm] \dfrac{dx_4}{dt}=-x_1-\rho\sigma.\end{cases} \tag{16}$$

(16)的系数矩阵的特征方程是：

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -(\rho+\lambda) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3 + \rho\lambda^2 + 4\lambda + 3\rho) = 0.$$

注意 $\lambda^3+\rho\lambda^2+4\lambda+3\rho=0$ 的根皆有负实部：

$$\Delta_1 = \rho > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \rho & 1 \\ 3\rho & 4 \end{vmatrix} = \rho > 0, \quad \Delta_3 = 3\rho, \rho > 0.$$

所以(16)只有一个非负实部的特征根 $\lambda=0$. 现求 $\lambda=0$ 对应的根向量，由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 0.$$

容易求出 $r_1=r_4=0, r_2=2, r_3=-1$，即 $\lambda=0$ 对应的根向量是 $(0,2,-1,0)^T$.

根据定理 1，知系统(15)的平凡解关于部分变元 x_1,σ 是绝对稳定的.

参 考 文 献

[1] 廖晓昕，中国科学，19(1988)，1019—1032.

[2] Кривошеев Ю. А.，ПММ，1980，Т. 44，В. 2，205—210.

[3] 廖晓昕，华中师范大学学报，6(1990)，139—142

On the Absoluts Stability of Indirect Control Systems with Respect to Partial Variables

Yu Guodong

(Guizhou Education College, Guiyang 550003)

Abstract

In this paper, the partial absolute stability of indirect control systems is discussed. For systems with seperated variables, we obtain necessary and sufficient conditions for the trivial solution to be absolutely stable with respect to part of variables. For systems with non-seperated variables, we obtain sufficient conditions that the trivial solution is absolutely stable with respect to partial variables.