第14卷第3期
1994年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 3
Aug. 1994

# 含有零化子为零的 $f$-元的 $l$-环*

马京京
(北京人才交流中心, 100088)

**摘要** Stuart A. Steinberg 在[1],[2],[3]中讨论了具有左 $f$-超单位的 $l$-环的一些性质. 本文将这些结论推广到含有零化子为零的 $f$-元的 $l$-环.

**关键词**: 格序环, $f$-元, 零化子, 多项式约束, 弱序单位.

## §1 预备知识

设 $R$ 是一个 $l$-环(Lattice-ordered ring), $R$ 称为右(左) $f$-环, 若 $\forall\ c\in R^+$, $a\wedge b=0$ 蕴涵 $ac\wedge b=0(ca\wedge b=0)$. $R$ 称为右(左) $d$-环或右(左)分配的 $l$-环, 若 $(a\wedge b)c=ac\wedge bc(c(a\wedge b)=ca\wedge cb)$, $c\in R^+$. 若 $R$ 同时是左和右 $f$-环($d$-环), 则称 $R$ 为 $f$-环($d$-环). 一个 $f$-环满足等式 $x^+x^-=0$([4, Corollary 1]), 一个满足 $x^+x^-=0$ 的 $l$-环 $R$ 是平方正的, 即 $\forall\ a\in R, a^2\geqslant 0$[4, Lemma 2]. 设 $F$ 是可换的有单位元的全序整环, $l$-环 $R$ 称为 $F$ 上的 $l$-代数, 如果 $R$ 是 $F$ 上的无扭代数和 $F$ 上的 $f$-模, 若 $R$ 为 $f$-环, 则称 $R$ 是 $F$ 上的 $f$-代数. 令 $T=\{r\in R: a\wedge b=0\Rightarrow |r|a\wedge b=a|r|\wedge b=0, \forall\ a, b\in R\}$, $T$ 是 $R$ 的凸 $f$-子代数, $T$ 中的正元素称为 $R$ 的 $f$-元. 设 $R$ 是 $F$ 上的 $l$-代数, 如果 $a, b\in R$, $a|a|\leqslant|b|$, $\forall\ a\in F$ 蕴涵 $a=0$, 则称 $R$ 是 $F$ 上的 Archimedes $l$-代数. $R$ 的一个元素 $e$ 称为 $R$ 的左超单位, 如果 $e\in R^+$ 且 $\forall\ x\in R^+, x\leqslant ex$. 如果一个左超单位同时是 $f$-元, 则称为左 $f$-超单位. $a\in R^+$ 称为 $R$ 的一个弱序单位, 若 $\forall\ b\in R^+$, $a\wedge b=0$ 蕴涵 $b=0$. 对 $R$ 的任意子集 $X$, 规定 $r_l(X)=\{a\in R: |x||a|=0, \forall\ x\in X\}$, $l_l(X)=\{a\in R: |a||x|=0, \forall\ x\in X\}$, 分别称为 $X$ 在 $R$ 中的右和左 $l$-零化子.

在[9]中 Steinberg 称一个多项式 $f(x,y)\in F[x,y]$ 是美好的, 如果 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$, 其中 $g(x,y)\neq 0$, 所含每一单项式关于 $x$ 的次数为 1 且具有正系数; $h(x,y)=0$ 或每一单项式关于 $x$ 的次数至少为 2. $f(x,y)$ 称为 $k$-美好的, 如果 $h(x,y)\in F[x^k,y]$; 称为左(右)美好的, 如果 $g(x,y)$ 有一个单项式以 $x$ 开头(结尾).

## §2 含零化子为零的 $f$-元的 $l$-环的一些性质

在[4]中 Birkhoff 和 Pierce 证明了一个有单位元的 $l$-环满足等式 $x^+x^-=0$ 当且仅当单位元的弱序单位. Steinberg 将上述结果推广到有左 $f$-超单位的 $l$-环[1]. 下面我们进一步考虑 $l$-环中的弱序单位与等式 $x^+x^-=0$ 之间的关系.

**引理 1** 设 $e$ 是 $l$-环 $R$ 的弱序单位和 $f$-元, $r_l(e)=\{0\}$. 若 $a\in R^+$, $(a\wedge e)^2=0$, 则 $a\leqslant e$.

**证明** 由 $a\wedge e\leqslant a\wedge 2e\leqslant 2(a\wedge e)$ 知 $(a\wedge 2e)^2=0$, 但 $e,(a\wedge 2e)\in T$, $T$ 是 $R$ 的凸 $f$-子环, 故

* 1991年11月30日收到.

为平方正的. 从而 $e(a\wedge 2e)\leqslant e^2+(a\wedge 2e)^2=e^2$，即 $e(a\wedge 2e)\vee e^2=e^2$，$e[(a\wedge 2e)\vee e-e]=0$. 由 $r_l(e)=\{0\}$ 得 $(a\wedge 2e)\vee e=e$，$[(a\wedge 2e)-e]\vee 0=0$，$[(a-e)\wedge e]\vee 0=0$，$[(a-e)\vee 0]\wedge e=0$，再由 $e$ 是弱序单位知 $(a-e)\vee 0=0$，因此 $a\leqslant e$.

**引理 2** 设 $e>0$ 是 $R$ 的一个 $f$-元，$r_l(e)=\{0\}$. 若 $R$ 满足 $\forall\, a\in R^+$，$(a\wedge e)^2=0$ 蕴涵 $a\in T$，则 $\forall\, a\in R, b\in T, a\wedge b=0$ 蕴涵 $ba=0$. 若还有 $l_l(e)=\{0\}$，则 $ab=0$.

**证明** 由 $a\wedge b=0$ 得 $(a\wedge e)\wedge b=0$，$(a\wedge e), b\in T$，$T$ 是 $f$-环从而满足 $x^+x^-=0$，故 $(a\wedge e)b=b(a\wedge e)=0$. 令 $a_1=a-a\wedge e$，$e_1=e-a\wedge e$，则 $a_1\wedge e_1=0$，$a_1e_1\wedge e_1=0$，$(a_1e_1\wedge e)e_1)\wedge e_1=0$，$e_1(a_1e_1\wedge e)=0$，$(a_1e_1\wedge e)^2=0$，由所设 $a_1e_1$ 是 $f$-元. 由 $a_1e_1\wedge b=0$ 和 $a_1e_1, b$ 是 $f$-元得到 $a_1eb=a_1e_1b=0$，从而 $(eba_1)^2=0$，$eba_1$ 是 $f$-元. 因为 $a_1\wedge e_1=0$，$eb$ 是 $f$-元，所以 $eba_1\wedge e_1=0$，$e_1eba_1=0$，$e^2ba=0$，但 $r_l(e)=\{0\}$，因此 $ba=0$. 若还有 $l_l(e)=\{0\}$，同理可证 $ab=0$.

**定理 1** 设 $R$ 是 $l$-环，$e>0$ 是 $R$ 的一个 $f$-元，$r_l(e)=\{0\}$，则下列陈述等价.

(1) $x^+ex^-=0, \forall\, x\in R$； (2) $e$ 是 $R$ 的一个弱序单位； (3) 若 $a\geqslant 0$ 且 $(a\wedge e)^2=0$，那么 $a\in T$； (4) $(xex)^-=0, \forall\, x\in R$ 且若 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$，则 $aea=0$.

**证明** (1)⇒(2) $x^+ex^-=0, \forall\, x\in R$ 等价于 $\forall\, a,b\in R^+$，$a\wedge b=0$ 蕴涵 $aeb=0$. 设 $a\in R^+$，$a\wedge e=0$，则 $e^2a=0$. 由 $r_l(e)=\{0\}$ 得 $a=0$，即 $e$ 是 $R$ 的弱序单位. (2)⇒(3) 由引理 1. (3)⇒(1) 设 $a\wedge b=0$，令 $a_1=a-a\wedge e$，$e_1=e-a\wedge e$，则 $a_1\wedge e_1=0$，由引理 2，$e_1a_1=0$，从而 $(a_1e_1)^2=0$，由假设 $a_1e_1\in T$. 因为 $a_1\wedge b=0$ 和 $e_1$ 是 $f$-元，所以 $a_1e_1\wedge b=0$，再由引理 2，$a_1e_1b=0$，因此 $aeb=a_1eb=a_1e_1b=0$. (1)⇒(4) $(xex)^-=[(x^+-x^-)e(x^+-x^-)]^-=(x^+ex^+-x^-ex^+-x^+ex^-+x^-ex^-)^-=(x^+ex^++x^-ex^-)^-=0$. 设 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$，由引理 1 $a\leqslant e$，从而 $a^2=0$，由[9]知 $aea=0$. (4)⇒(3) 设 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$，由所设知 $aea=0$ 且 $0\leqslant (a-e)e(a-e)=(aea-e^2a-a^2e+e^3)$，因此 $e^2a\leqslant e^3$，由 $r_l(e)=\{0\}$ 得 $a\leqslant e$，故 $a\in T$.

本文的最后给出了一个 $l$-环 $R$ 含 $f$-元 $e$ 是弱序单位且 $r_l(e)=\{0\}$，但 $R$ 不满足 $x^+x^-=0$ 的例子.

**推论 1** 设 $R$ 是 $F$ 上的 $l$-代数，$e>0$ 是 $R$ 的一个 $f$-元满足 $r_l(e)=l_l(e)=\{0\}$，则下列陈述等价.

(1) $x^+x^-=0, \forall\, x\in R$； (2) $e$ 是 $R$ 的一个弱序单位； (3) 若 $a\geqslant 0$ 且 $(a\wedge e)^2=0$，那么 $a\in T$； (4) $x^2\geqslant 0, \forall\, x\in R$ 且若 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$，则 $a^2=0$； (5) $R$ 满足 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$ 蕴涵 $a^2=0$ 且对 $\forall\, a,b\in R$（或 $R^+$）存在一个整数 $K\geqslant 2$ 和一个左或右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)=-g(x,y)+p(x)+h(x,y)$，其中 $y$ 在 $p(y)$ 中每项的次数大于 $y$ 在 $g(x,y)$ 中的次数，满足 $f(a,b)\geqslant 0$.

**证明** (1)⇒(2) 显然. (2)⇒(3) 由引理 1. (3)⇒(1) 设 $a\wedge b=0$，由定理 1 知 $aeb=0$，因此 $(eba)^2=0$. 由所设 $eba$ 是 $f$-元，从而 $e^2(eba)\leqslant e^4+(eba)^2=e^4$，$e^3ba=e^3ba\wedge e^4=e^3(ba\wedge e)$，但 $r_l(e)=\{0\}$，故有 $ba=ba\wedge e\leqslant e$. 同理由 $bea=0$ 得 $ab\leqslant e$. 令 $a_1=a-a\wedge e$，$e_1=e-a\wedge e$，$b_1=b-b\wedge e$，$e_2=e-b\wedge e$，那么 $a_1\wedge e_1=b_1\wedge e_2=0$，由引理 2，$a_1e_1=e_1a_1=b_1e_2=e_2b_1=0$. 因为 $(a\wedge e)b=0$，所以 $e_1ab=e_1a_1b=0$，$eab=(a\wedge e)ab\leqslant a^2b$. 由 $ab\leqslant e$ 及 $aeb=0$ 得 $a^2b^2=0$，从而 $eab^2\leqslant a^2b^2=0$，故 $ab^2=0$. 因为 $a(b\wedge e)=0$，故有 $ab_1=ab$，$abe_2=ab_1e_2=0$，$abe=ab(b\wedge e)\leqslant ab^2=0$，因此 $abe=0$，再由 $l_l(e)=\{0\}$ 得到 $ab=0$. (1)⇒(4) 显然. (4)⇒(3) 设 $a\geqslant 0$，$(a\wedge e)^2=0$，由所设 $a^2=0$，但 $R$ 是平方正的，从而 $ea\leqslant e^2+a^2=e^2$，再由 $r_l(e)=\{0\}$ 知 $a=a\wedge e\leqslant e$. (4)⇒(5) 取 $f(x,y)=-xy-yx+y^2+x^2$，因 $R$

是平方正的，$\forall\ a,b\in R, f(a,b)\geqslant 0$. (5)$\Rightarrow$(3) 设 $a\geqslant 0,(a\wedge e)^2=0$，由所设 $a^2=0$，又知存在一个左或右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)$ 使 $f(a,e)\geqslant 0$. 设 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$，因 $K\geqslant 2$，$a^2=0$，则 $h(a,e)=0$，从而 $0\leqslant g(a,e)\leqslant p(e)$. 不妨设 $f(x,y)$ 是右美好的，$g(a,e)$ 有一项为 $\alpha e^n a$，$0<\alpha\in F, n\geqslant 0$. 由 $\alpha e^n a\leqslant p(e)$ 得 $\alpha e^n a=\alpha e^n a\wedge p(e)$. 因 $y$ 在 $p(y)$ 中每项的次数大于 $y$ 在 $g(x,y)$ 中的次数，$p(e)$ 可写成 $e^n p_1(e)$，从而 $e^n(\alpha a)=e^n(\alpha a)\wedge e^n p_1(e)$，$\alpha a=\alpha a\wedge p_1(e)\leqslant p_1(e)$，但 $p_1(e)\in T$，因此 $\alpha a\in T, a\in T$.

在[2]中 Steinberg 系统讨论了 $l$-环的根的理论，并将 Johnson 在[5]中引入的 $f$-环的 $J$-根(抽象环论中 Jacobson 根的相似物)推广到各种包含 $f$-环类的环类中. 借助于[6]中的结果，可将[2]中的一些结论推广. 下面的术语引自[2].

设 $J_0$ 是 $l$-本原的 $l$-环类决定的高根，$S_A$ 是所有 archimedes $l$-素的 $l$-环作成的特殊类决定的高根，$l$-$\beta$ 表示全体 $l$-素的 $l$-环作成的特殊类决定的高根. $D_d, {}_dD, D_f, D_s$ 分别表示 $R/l-\beta(R)$ 为右分配，左分配，$f$-环，平方正的全体 $l$-环 $R$ 作成的类.

**引理 3** 设 $R$ 是一个右(左)分配的 $l$-半素 $l$-环，含有 $f$-元 $e>0$，$r_l(e)=\{0\}$ $(l_l(e)=\{0\})$，那么 $R$ 是一个 $f$-环.

**证明** 先证 $R$ 是右 $f$-环. 设 $a\wedge b=0, r\in R^+$，因 $R$ 是右分配的，$\forall\ c\in R^+$ 有 $(ar\wedge b)c=(arc\wedge bc)\leqslant a(rc\vee c)\wedge b(rc\vee c)=(a\wedge b)(rc\vee c)=0$. 从而 $(ar\wedge b)R=\{0\}$，但 $R$ 是 $l$-半素的，故有 $ar\wedge b=0$，$R$ 是右 $f$-环. 设 $a\wedge e=0$，由 $R$ 是右 $f$-环和 $e$ 是一个 $f$-元得 $ea=ea\wedge ea=0$，但 $r_l(e)=\{0\}$，从而 $a=0$，$e$ 是 $R$ 的一个弱序单位，由[6，命题 3，P. 329]知 $R$ 是一个 $f$-环.

下面命题 1 和 2 中的结论在 $e$ 为左或右 $f$-超单位时已为 Steinberg 所证[2].

**命题 1** 设 $R$ 是一个 $l$-环满足下列条件之一： (a) $R\in D_d$ 和 $R$ 有一个 $f$-元 $e>0$，$r_l(e)=\{0\}$； (b) $R\in {}_dD$ 和 $R$ 有一个 $f$-元 $e>0$，$l_2(e)=\{0\}$； (c) $R\in D_f$； (d) $R\in D_s$ 和对 $R$ 的任意 $l$-素 $l$-理想 $I$ 均存在 $R$ 的 $f$-元不属于 $I$. 那么 $S_A(R)=0$ 当且仅当 $R$ 能嵌入实数域的一个直积中.

**证明** 充分性显然. 必要性：设 $S_A(R)=0$. 如果 $R$ 满足(c)，那么 $R$ 是一组 archimedes $l$-素 $f$-环的亚直积. 由[5]知一个 archimedes $l$-素的 $f$-环能够嵌入实数域，因此 $R$ 能够嵌入实数域的一个直积中. 如果 $R$ 满足(a)或(b)，因 $S_A(R)=0$ 蕴涵 $R$ 是 $l$-半素的，由引理 3 知 $R$ 是 $f$-环，即 $R$ 满足(c). 如果 $R$ 满足(d)，那么 $R$ 是一组平方正 archimedes $l$-素 $l$-环 $A_\alpha$ 的亚直积，且每一个 $A_\alpha$ 含非零的 $f$-元，由[6]，$A_\alpha$ 是整的，再由[6]知每一个 $A_\alpha$ 是 $f$-环，因此 $R$ 是 $f$-环，即 $R$ 满足(c).

**命题 2** 设 $R$ 是一个 $l$-环有一个 $f$-元 $e>0$，假定 $R\neq J_0(R)$ 和 $\forall\ a\in R^+, ea\in J_0(R)$ 蕴含 $a\in J_0(R)$ 且 $R$ 满足关于主 $l$-理想的降链条件. 如果 $R\in D_d$，那么 $R/J_0(R)$ 是有限个有单位元的 $l$-单 $f$-环的直和.

**证明** $\bar{R}=R/J_0(R)$ 是右分配的 $l$-半素 $l$-环，由所设 $\bar{e}>0$ 是 $\bar{R}$ 的 $f$-元且 $r_l(\bar{e})=\{0\}$，从引理 3 得知 $\bar{R}$ 是一个 $f$-环，由[2]的证明知 $\bar{R}$ 是一组有单位元的 $l$-单 $f$-环 $R_\alpha$ 的直和 $\bar{R}=\bigoplus R_\alpha$. 设 $\bar{e}=r_{\alpha 1}+\cdots+r_{\alpha k}, r_{\alpha i}\in R_{\alpha i}, i=1,\cdots,k$. $\forall\ x\in R_\alpha^+, \alpha\neq\alpha_1,\cdots,\alpha_k, \bar{e}x\in R_\alpha\cap(R_{\alpha 1}+\cdots+R_{\alpha k})$，从而 $\bar{e}x=0$，但 $r_l(\bar{e})=\{0\}$，因此 $x=0$，$\bar{R}=R_{\alpha 1}\oplus\cdots\oplus R_{\alpha k}$ 是有限直和.

在[6]中我们已经指出一个含非零 $f$-元的平方正 $l$-素 $l$-环是整环，并且平方正可推广为更一般的多项式约束. 下面几个涉及 $l$-素的 $l$-代数何时为 $l$-整的结果已为 Steinberg 在一些更

强的条件下证得[3].

**定理 2** 设 $R$ 是一个 $l$-素的 $l$-代数其 $T\neq\{0\}$. 假定对任何 $a\in R,b\in T$ 存在一个整数 $K\geqslant 2$ 和一个右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)$ 满足 $f(a^+,b^+)\geqslant 0$. (a) 如果 $T$ 含一元 $e>0,r_l(e)=\{0\}$, 则 $R$ 是 $l$-整的; (b) 如果多项式 $f(x,y)$ 还是左美好的并且次数有界, 则 $R$ 是 $l$-整的; (c) 如果在(b)中, $f(a,b^+)\geqslant 0,f(-a,b^+)\geqslant 0$, 则 $R$ 是简约的和 $l$-整的.

**证明** (a) 设 $a\in R^+,a^2=0$, 由所设存在一个右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$ 使得 $f(a,e)\geqslant 0$. 因 $K\geqslant 2$, 故 $h(a,e)=0$, 所以 $0\leqslant g(a,e)\leqslant p(e)$. $g(a,e)$ 含有一项为 $\alpha e^na,0<\alpha\in F,n\geqslant 0$, 由 $\alpha e^na\leqslant g(a,e)\leqslant p(e)$ 知 $\alpha e^na$ 是 $f$-元, 从而 $e^na$ 是 $f$-元. 因 $(a\wedge e^na)^2=0$ 和 $R$ 是 $l$-素的, 所以 $a\wedge e^na=0,e^na=e^na\wedge e^na=0$, 再由 $r_l(e)=\{0\}$ 便得 $a=0$. 若 $a,b\in R^+,ab=0$. $\forall x\in R^+,(bxa)^2=0$, 由前证 $bxa=0$, 从而 $bRa=\{0\}$, 但 $R$ 是 $l$-素的, 故有 $a=0$ 或 $b=0$, $R$ 是 $l$-整的.

(b) 参看[6, 定理 2, P327].

(c) 首先由(b)知 $R$ 是 $l$-整的. 设 $a\in R,a^2=0$, 由所设存在一个左和右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$ 使 $f(a,e)\geqslant 0,f(-a,e)\geqslant 0$. 因 $K\geqslant 2$, 所以 $h(a,e)=h(-a,e)=0$, 从而 $|g(a,e)|\leqslant p(e)\in T$. $g(a,e)$ 含有项 $\alpha e^na,\beta ae^m,\alpha,\beta>0,\alpha,\beta\in F,m,n\geqslant 0$. 因 $g(x,y)$ 中各项系数为正且由[9, Lemma 1, P. 148]知 $R$ 是一个 $T$-$T$ $f$-双模, 而 $|\alpha e^na|\leqslant|g(a,e)|,|\beta ae^m|\leqslant|g(a,e)|$ 在 $R$ 的任何全序 $T$-$T$ 双模同态像中成立, 故在 $R$ 中亦有 $|\alpha e^na|\leqslant|g(a,e)|,|\beta ae^m|\leqslant|g(a,e)|$, 因此 $|\alpha e^na|,|\beta ae^m|$ 从而 $e^n|a|\,|a|e^m$ 是 $f$-元. 现在设 $b\wedge c=0,b,c\in R^+$. 则 $e^n(|a|b\wedge c)=e^n|a|b\wedge e^nc=0,(b|a|\wedge c)e^m=b|a|e^m\wedge ce^m=0$, 但 $R$ 是 $l$-整的, 因此 $|a|b\wedge c=b|a|\wedge c=0$, 即 $a\in T$. $T$ 是 $f$-环, 从而满足 $|xy|=|x|\,|y|$, 因此 $|a|^2=|a^2|=0$, 再由 $R$ 是 $l$-整的得 $|a|=0,a=0$, 这证明了 $R$ 是简约的.

**命题 3** 设 $R$ 是 $F$ 上的 $l$-代数, 含 $f$-元 $e>0,r_l(e)=\{0\}$ 且 $l_T(T)=\{0\}$ ($l_T(T)$ 表示 $T$ 在 $T$ 中的左零化子). 如果下列条件之一成立, 那么 $x^+x^-=0$ 蕴涵 $x^-x^+=0$.

(a) $R$ 是平方正的;

(b) $\forall a,b\in R$, 存在一个整数 $K\geqslant 2$ 和一个右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$, 其中 $y$ 在 $p(y)$ 中每项的次数大于 $y$ 在 $g(x,y)$ 中的次数, 满足 $f(a^+,b^+)\geqslant 0$.

**证明** 只需证当 $R$ 满足(b)时命题成立. 设 $a,b\in R,a\wedge b=0,ab=0$, 要证 $ba=0$. 首先由推论 1 (5)⇒(3)的证明知若 $c\in R^+,c^2=0$, 则 $c$ 是 $f$-元. 令 $a_1=a\wedge e,b_1=b\wedge e,b_2=b-b_1,e_2=e-b_1,a_2=a-a_1,f_2=e-a_1$, 则有 $b_2\wedge e_2=a_2\wedge f_2=0$. 再令 $b_0=b,a_0=a$, 由 $ab=0$ 得 $a_1b_i=a_ib_i=0,0\leqslant i\leqslant 2$, 因而 $f_2b_i=eb_i,a_ie_2=a_ie,0\leqslant i\leqslant 2$. 由 $a\wedge b=0$ 得 $a_1\wedge b_1=0$, 但 $a_1,b_1\in T$, 故有 $b_1a_1=0$. 由 $b_2\wedge e_2=0$ 得 $b_2a_1\wedge e_2=0$, 由于 $(b_2a_1)^2=0$, 所以 $b_2a_1$ 是 $f$-元, 从而 $b_2a_1e_2=0,b_2a_1e=0$, 因此 $ba_1e=(b_1+b_2)a_1e=b_1a_1e+b_2a_1e=0,ba_2e=bae$. 由 $a_2\wedge f_2=0$ 得 $b_1a_2\wedge f_2=0,f_2b_1a_2=0,eb_1a_2=0,b_1a_2=0$, 因而 $bae=b(a_1+a_2)e=ba_1e+ba_2e=ba_2e=(b_1+b_2)a_2e=b_1a_2e+b_2a_2e=b_2a_2e$. 由所设存在一个右 $K$-美好的多项式 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$ 使 $f(b_2,e)\geqslant 0$. $\forall m,n\geqslant 0,e^nb_2e^ma_2$ 是 $f$-元, 由 $b_2\wedge e_2=0$ 得 $b_2e^nb_2e^ma_2\wedge e_2=0$, 但 $(b_2e^nb_2e^ma_2)^2=0$, 从而 $b_2e^nb_2e^ma_2$ 仍为 $f$-元, 故有 $b_2e^nb_2e^ma_2e=b_2e^nb_2e^ma_2e_2=0$, 由此及 $K\geqslant 2$ 知 $h(b_2,e)a_2e=0$, 因此得到 $g(b_2,e)a_2e\leqslant p(e)a_2e$. $f(x,y)$ 是右美好的, $g(b_2,e)$ 有一项 $\alpha e^sb_2,0<\alpha\in F,s\geqslant 0$, 从而 $\alpha e^sb_2a_2e\leqslant p(e)a_2(e)\leqslant|p(e)|a_2e$. 再由 $a_2\wedge f_2=0$ 得到 $a_2\wedge\alpha e^sf_2b_2a_2e=0$, $ea_2\wedge\alpha e^{s+1}b_2a_2e=0,e|p(e)|a_2(e)\wedge\alpha e^{s+1}b_2a_2e=0$, 从而 $\alpha e^{s+1}b_2a_2e=0,b_2a_2e=0,bae=0$. $\forall t\in T^+,e+t$

是 $R$ 的一个 $f$-元且 $r_l(e+t)=\{0\}$，由前所证 $ba(e+t)=0$，但 $bae=0$，从而 $bat=0$，$\forall\ t\in T^+$，这样便有 $ba\in l_T(T)$，从而 $ba=0$.

## §3　一个例子

本节给出一个 $l$-环 $R$，$R$ 有一个 $f$-元 $e$ 是弱序单位且 $r_l(e)=\{0\}$，但 $R$ 不满足 $x^+x^-=0$. 这个例子利用了 Conrad 和 Mccarthy[7]中的广义半群环. 下面先引进一些预备知识，参见[8].

设 $\Delta$ 是一个偏序集其中有一个结合的部分乘法，即对某些 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\alpha\beta$ 有定义且

$$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\Delta,\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)-\gamma \text{ 若任一边有定义} \qquad (\mathrm{I})$$

设 $F$ 是有单位元的全序整环，$v$ 是一个从 $\Delta$ 到 $F$ 的函数，在 $\alpha\in\Delta$ 处的值为 $v_\alpha$，将 $v$ 记为 $v=\sum v_\alpha\alpha$，并将 $v$ 的支集(support)记为 supp $v=\{\alpha\in\Delta:v_\alpha\neq0\}$. supp $v$ 中极大元的集合记为 max supp $v$.

设 $\Sigma=\Sigma[\Delta]=\{v=\Sigma v_\alpha\alpha:\text{supp } v$ 是有限集$\}$；$\Sigma^+=\{v\in\Sigma:\forall\ \alpha\in\max\text{ supp }v,v_\alpha>0\}$. 对 $u,v\in\Sigma$，定义 $uv$ 如下：

$$(uv)_\gamma=\begin{cases}\sum\limits_{\alpha\beta=\gamma}u_\alpha v_\beta, & \text{如果 } \gamma\in\Delta^2,\\ 0, & \text{如果 } \gamma\notin\Delta^2.\end{cases}$$

考虑下列关于 $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ 的条件.

若 $\alpha<\beta$ 且 $\alpha\gamma$ 有定义，则 $\beta\gamma$ 有定义且 $\alpha\gamma<\beta\gamma$ 和若 $\gamma\alpha$ 有定义则 $\gamma\beta$ 有定义且 $\gamma\alpha<\gamma\beta$　(Ⅱ)

若 $\alpha\parallel\beta$(表示 $\alpha$ 与 $\beta$ 不可比)且 $\gamma\alpha$ 有定义，则 $\gamma\alpha\parallel\beta$ 和若 $\alpha\gamma$ 有定义，则 $\alpha\gamma\parallel\beta$.　(Ⅲ)

一个偏序集 $\Delta$ 称为根的(rooted)，如果对任何 $\alpha\in\Delta$，$\{\beta\in\Delta:\beta\in\alpha\}$ 是一个链.

从[7]和[8]中已知下面一些结论：

$\Sigma$ 是一个 $l$-环当且仅当 $\Delta$ 是根的且满足(Ⅰ)和(Ⅱ). 若 $\Sigma$ 是一个 $l$-环，$\Sigma$ 满足 $x^+x^-=0$ 当且仅当 $\Delta$ 满足$\forall\ \alpha,\beta\in\Delta,\alpha\parallel\beta$ 蕴含 $\alpha\beta$ 无定义. 令 $\Gamma=\{\gamma\in\Delta:\gamma$ 满足(Ⅲ)$\}$，若 $\Sigma$ 是一个 $l$-环，则 $\Sigma[\Gamma]=T(\Sigma)$.

下面分几步构造所希望的 $l$-环.

1　设 $\Delta_1$ 是由 $e_1,a$ 生成的半群. 若 $a,b\in\Delta_1$，则 $a,b$ 可表成 $a=e_1^{n_1}a^{n_2}\cdots e_1^{n_{k-1}}a^{n_k}$，$b=e_1^{m_1}a^{m_2}\cdots e_1^{m_{k-1}}a^{m_k}$，$n_i,m_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,k$. 规定 $\Delta_1$ 中的序如下：$a<b$ 当且仅当 $n_k<m_k$ 或 $n_k=m_k,n_{k-1}>m_{k-1}$ 或$\cdots n_k=m_k,n_{k-1}=m_{k-1},\cdots,n_2=m_2,n_1>m_1$. 容易验证 $\Delta_1$ 是满足(Ⅰ)，(Ⅱ)的全序集.

2　用 $\Delta_1a$ 表 $\Delta_1$ 中以 $a^n(n>0)$结尾的全体元素，$\Delta_2$ 是一与 $\Delta_1$ 不相交且与 $\Delta_1a$ 等势的集合，$\varphi:\Delta_1a\to\Delta_2$ 是双射. 规定 $\Delta_2$ 中序如下：若 $a,b\in\Delta_2,a=\varphi(a_1),b=\varphi(b_1),a_1,b_1\in\Delta_1a$，则 $a<b$ 当且仅当 $a_1<b_1$. 因此 $\Delta_2$ 亦为全序集.

3　令 $\Delta_3=\Delta_1\cup\Delta_2$，并规定对任何 $a\in\Delta_2,b\in\Delta_1,a<b$，则 $\Delta_3$ 是全序集. 设 $b\in\Delta_1,a\in\Delta_2,a=\varphi(a_1),a_1\in\Delta_1a$，规定 $ba=\varphi(ba_1)$，除了此乘法和 $\Delta_1$ 中乘法外，$\Delta_3$ 中其余元相乘无定义. 验证 $\Delta_3$ 满足(Ⅰ)和(Ⅱ).

(Ⅰ)　设 $a(bc)$有定义且 $a,b,c$ 不全属于 $\Delta_1$，则 $a,b\in\Delta_1,c\in\Delta_2,c=\varphi(c_1),c_1\in\Delta_1a$，由定义 $a(bc)=a\varphi(bc_1)=\varphi(a(bc_1))=\varphi((ab)c_1)=(ab)\varphi(c_1)=(ab)c$. 若$(ab)c$ 有定义同理可证.

(Ⅱ)　设 $a<b$ 和 $ac,ca$ 有定义，$a,b,c\in\Delta_3$，则有下面几种情况须验证.

(a)　$a,b\in\Delta_1,c\in\Delta_2$. 若 $c=\varphi(c_1),c_1\in\Delta_1a$，则 $ac=\varphi(ac_1)<\varphi(bc_1)=b\varphi(c_1)=bc$.

(b) $a,b\in\Delta_2, c\in\Delta_1$. 若 $a=\varphi(a_1), b=\varphi(b_1), a_1,b_1\in\Delta_1\alpha$,则由 $a<b$ 得 $a_1<b_1, ca_1<cb_1$,从而 $\varphi(ca_1)<\varphi(cb_1), ca<cb$.

(c) $a\in\Delta_2, b,c\in\Delta_1$. 是 $ca\in\Delta_2, cb\in\Delta_1$,因此 $ca<cb$.

4 令 $\Delta_4$ 是由 $\beta$ 生成的半群,其序为 $\beta>\beta^2>\cdots>\beta>\cdots$,则 $\Delta_4$ 是满足(Ⅰ)、(Ⅱ)的全序集.

5 令 $\Delta=\Delta_3\cup\Delta_4$, $\Delta_3$ 中元与 $\Delta_4$ 中元不可比,则 $\Delta$ 是根的偏序集. 设 $a\in\Delta_1\alpha$,令 $a\beta=\psi(a)$,除此乘法和前面规定的 $\Delta_3$ 与 $\Delta_4$ 中乘法外,$\Delta$ 中其余元相乘无定义. 验证 $\Delta$ 满足(Ⅰ)、(Ⅱ).

(Ⅰ) 设 $a(bc)$ 有定义,且 $a,b,c$ 不全属于 $\Delta_3$ 或 $\Delta_4$,则 $a\in\Delta_1, b\in\Delta_1\alpha, c=\beta$,由定义 $a(bc)=a\varphi(b)=\varphi(ab), ab\in\Delta_1\alpha$,从而 $\varphi(ab)=(ab)\beta=(ab)c$. 若 $(ab)c$ 有定义同理可证.

(Ⅱ) 设 $a<b$ 和 $ac, ca$ 有定义,$a,b,c\in\Delta$ 且不全属于 $\Delta_3$ 或 $\Delta_4$,则 $a,b\in\Delta_3, c\in\Delta_4, a\in\Delta$、$a, c=\beta, ac=\varphi(a)$. 由 $a<b$ 和 $b\in\Delta_1\alpha$,从而 $bc=\varphi(b)>\varphi(a)=ac$.

这样 $\Delta$ 是根的偏序集且满足(Ⅰ)和(Ⅱ),因此 $\Sigma[\Delta]$ 是一个 $l$-环具有下列性质:

(a) $\Sigma[\Delta]$ 是一个右 $f$-环;

(b) $e_1,\beta\in\Gamma$,因此 $e=e_1+\beta$ 是 $\Sigma[\Delta]$ 的 $f$-元;

(c) $\forall\, a\in\Delta$, $a$ 与 $e_1$ 或 $\beta$ 可比,因此 $e$ 是 $\Sigma[\Delta]$ 的弱序单位;

(d) $\forall\, a\in\Delta$, $e_1a$ 或 $\beta a$ 有定义,因此 $e$ 的右 $l$-零化子为零;

(e) $a\parallel\beta$ 但 $a\beta=\varphi(a)$ 有定义,因此 $\Sigma[\Delta]$ 不满足 $x^+x^-=0$.

注意 $\beta$ 是一个 $f$-元,上例表明引理 2 中若没有条件 $l_l(e)=\{0\}$,则得不到 $ab=0$.

## 参 考 文 献


[1] S. A. Steinberg, *Identities and nilpotent elements in lattice-ordered rings*, Ring Theory (S. K. Jain, ed), Dekker, New York, 1977.

[2] S. A. Steinberg, *Radical theory in lattice-ordered rings*, Sympos. Math. 21(1971), 379—400.

[3] S. A. Steinberg, *On lattice-ordered algebras that satisfy polynomial identities*, Ordered Algebraic Structures (W. B. Powell and C. Tsinakis ed), Dekker, New York, 1985.

[4] G. Birkhoff and R. S. Pierce, *Lattice-ordered rings*, An. Acad. Brasil. Ci. 28(1956), 41—69.

[5] D. G. Johnson, *A structure theory for a class of lattice-ordered rings*, Acta. Math. 104(1960), 163—215.

[6] 马京京, 关于具有多项式约束的 $l$-环, 数学研究与评论, 11(1991), 325—330.

[7] P. Conrad and P. Mccarthy, *The structure of f-algebra*, Math. Nachr. 58(1973), 169—191.

[8] S. A. Steinberg, *Example of lattice-ordered rings*, J. of Algebra, 72(1981), 223—236.

[9] S. A. Steinberg, *Unital l-prime lattice-ordered rings with polynomial constraints are domains*, Trans. Amer. Math. Soc., 276(1983), 145—164.


# $l$-rings with $f$-elements Which Have Zero Annihilators


*Ma Jingjing*



### Abstract

Stuart A. Steinberg discussed some properties of $l$-ring with left $f$- superunits in [1], [2], and [3]. In this paper, we generalize the results to the $l$-rings with $f$-elements which have zero annihilators.