具有实谱值的四元数矩阵的谱值估计*

杨 忠 鹏

(吉林师范学院数学系，吉林，132011)

摘 要 本文给出了具有实谱值的四元数矩阵的定义，得到了一些具有实谱值的四元数矩阵的谱值不等式，这些不等式只涉及到了四元数矩阵的迹的实部和它的平方的迹的实部.

关键词 四元数矩阵的谱值，具有实谱值的四元数矩阵，实对称矩阵.

设 $SC_n(Q)$、$GL_n(Q)$、$GU_n(Q)$分别为四元数体 Q 上的 $n\times n$ 自共轭、非奇异、广义酉矩阵的集合，R 为 Q 的中心. 当 $\alpha=a+bi+cj+dk\in Q$ $(a,b,c,d\in R)$时，记 Re $\alpha=a$，$N(\alpha)=\alpha\bar{\alpha}=\bar{\alpha}\alpha=a^2+b^2+c^2+d^2$.

首先由谢邦杰教授证明了[1]，有 $U\in GU_n(Q)$使

$$A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^*,\lambda_s(A)\in R,s=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

由(2)知 $A=(a_{st})\in SC_n(Q)$满足(总约定 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$)，

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,A = \sum_{s=1}^{n}a_{ss} = \sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) = \mathrm{tr}\,V^*AV, \\ &\lambda_s(A) = \lambda_s(V^*AV),\ s=1,2,\cdots,n;\ V\in GU_n(Q). \end{aligned} \tag{2}$$

之后屠伯埙教授将常规矩阵的 Schur 定理推广到可中心化矩阵[2]，可 Σ 化矩阵[3]，首次提出了"谱值"的概念，并对其中的一类矩阵——中心封闭阵进行了深入研究[2]. 若

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P^{-1},\ \lambda_s\in R,\ s=1,2,\cdots,n;\ P\in GL_n(Q), \tag{3}$$

则[2]称 A 为中心封闭阵. [4]在[2]、[3]基础上证明，

$$A = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}\in Q^{n\times n},\lambda_s\in Q,s=1,2,\cdots,n;P\in GL_n(Q). \tag{4}$$

[4]称 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的谱值. 若(4)中 $\lambda_s\in R,s=1,2,\cdots,n$，则称 A 为具有实谱值的四元数矩阵，记 $A\in RS_n(Q)$且约定 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$.

当 $A(\geqslant0),B(\geqslant0)\in SC_n(Q)$时，由[5]知 AB 相似于非负实对角阵，因而 AB 为中心封闭矩阵.

设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\geqslant0,B=\begin{bmatrix}0&i+j\\-i-j&0\end{bmatrix}\in SC_2(Q)$. 易知 AB 不是中心封闭阵.

* 1991年10月11日收到. 93年3月29日收到修改稿.

仿[6]定理 3 的证明，从(1)易知，当 $A(\geqslant 0)$，$B\in SC_n(Q)$时，$AB\in RS_n(Q)$且 AB 与 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ 有相同的谱值. 这样由(1)，(3)及上例知，$RS_n(Q)$是比自共轭、中心封闭阵更为广泛的一类矩阵.

由约定易得

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta)=\mathrm{Re}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\beta,\quad \mathrm{Re}(\alpha\beta)=\mathrm{Re}(\beta\alpha),\ \alpha,\beta\in Q. \tag{5}$$

当 $A=\begin{bmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{bmatrix}\in RS_n(Q)$时，总设 $\omega(A)=\|A\|^2-\max\limits_{\substack{B_k\neq 0,C_k\neq 0\\ 1\leqslant k\leqslant n-1}}(\|B_k\|-\|C_k\|)^2$(如同[2]规定 $\|M\|^2=\mathrm{tr}\,MM^*$，$M\in Q^{m\times n}$)，这样由(4)和[4]

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2=\sum_{s=1}^{n}N(\lambda_s)\leqslant\omega(A),\quad A\in RS_n(Q). \tag{6}$$

由(5)易证明

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A=\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,PAP^{-1},\quad A\in Q^{n\times n},P\in GL_n(Q). \tag{7}$$

(7)表明四元数矩阵的迹的实部是相似不变量. 因此[2]中命题 2 及定理 4—7 中的“tr A”应用“Re tr A”来修正.

设 $A\in RS_n(Q)$且 $m(A)=\dfrac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A}{n}$，$s(A)=[\dfrac{1}{n}(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A^2-\dfrac{(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A)^2}{n})]^{\frac{1}{2}}$，由(4)，(7)易证明

$$m(A)=\frac{\sum_{s=1}^{n}\lambda_s}{n}; \tag{8}$$

$$s(A)=[\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s-m(A))^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

屠伯埙教授在[2]，[7]中对“迹占优”的中心封闭阵、自共轭阵的(实)特征值给出了只与相应矩阵(包括子阵)的迹有关的估计式，此法简单且实用. 最近 Pablo Tarazaga 对实对称阵也得到了类似的结果[8].

引理 设 $A\in RS_n(Q)$，$\mu_s\in R$，$s=1,2,\cdots,n$. 则

$$m(A)-(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s\leqslant m(A)+(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1)^{\frac{1}{2}}s(A),\ \sum_{s=1}^{n}\mu_s=1; \tag{10}$$

$$-(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s\leqslant(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2)^{\frac{1}{2}}s(A),\ \sum_{s=1}^{n}\mu_s=0. \tag{11}$$

证明 当 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s=1$ 时，$\sum_{s=1}^{n}(\mu_s-\frac{1}{n})[\lambda_s-m(A)]=\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s-m(A)$，$n\sum_{s=1}^{n}(\mu_s-\frac{1}{n})^2=\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1$，这样从(8)，(9)及 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s-m(A)|\leqslant[\sum_{s=1}^{n}(\mu_s-\frac{1}{n})^2]^{\frac{1}{2}}[\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s-m(A))^2]^{\frac{1}{2}}=(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1)^{\frac{1}{2}}s(A),$$

由此知(10)成立.

当 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s=0$ 时，$\sum_{s=1}^{n}\mu_s[\lambda_s-m(A)]=\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s$，从(8)，(9)及 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s|\leqslant[\sum_{s=1}^{n}\mu_s^2]^{\frac{1}{2}}[\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s-m(A))^2]^{\frac{1}{2}}=(\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2)^{\frac{1}{2}}s(A).$$

即(11)成立. □

定理 1 设 $A\in RS_n(Q)$，则

$$m(A)-\left(\frac{t-1}{n-t+1}\right)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\frac{1}{l-t+1}\sum_{s=t}^{l}\lambda_s,\qquad 1\leqslant t\leqslant l\leqslant n,\tag{12.1}$$

且等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{t-1}$ 且 $\lambda_t=\cdots=\lambda_n$；

$$m(A)+\left(\frac{n}{l}-1\right)^{\frac{1}{2}}s(A)\geqslant\frac{1}{l-t+1}\sum_{s=t}^{l}\lambda_s,\qquad 1\leqslant t\leqslant l\leqslant n,\tag{12.2}$$

且等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_l$ 且 $\lambda_{l+1}=\cdots=\lambda_n$.

证明 此时

$$\frac{1}{n-t+1}\sum_{s=t}^{n}\lambda_s\leqslant\frac{1}{l-t+1}\sum_{s=t}^{l}\lambda_s\leqslant\frac{1}{l}\sum_{s=1}^{l}\lambda_s,\qquad 1\leqslant t\leqslant l\leqslant n.\tag{13}$$

令 $\mu_1=\cdots=\mu_{t-1}=0,\mu_t=\cdots=\mu_n=\frac{1}{n-t+1}$，则 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s=1$ 且 $\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1=\frac{t-1}{n-t+1}$，$\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s=\frac{1}{n-t+1}\sum_{s=t}^{n}\lambda_s$. 因此从(10)，$m(A)-\left(\frac{t-1}{n-t+1}\right)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\frac{1}{n-t+1}\sum_{s=t}^{n}\lambda_s$，由(13)知(12.1)成立. 由(10)的证明知上式的等号成立$\Leftrightarrow$有 $a\in R$ 使 $\mu_s-\frac{1}{n}=a[\lambda_s-m(A)]$，$s=1,2,\cdots,n$；进而知(12.1)等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{t-1}$ 且 $\lambda_t=\cdots=\lambda_n$.

令 $\mu_1=\cdots=\mu_l=\frac{1}{l},\mu_{l+1}=\cdots=\mu_n=0$，则 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s=1$ 且 $\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2-1=\frac{n}{l}-1$，$\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s=\frac{1}{l}\sum_{s=1}^{l}\lambda_s$，因此从(10)，(13)知(12.2)成立. 类似于(12.1)等式成立条件的证明知，(12.2)等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_l$ 且 $\lambda_{l+1}=\cdots=\lambda_n$.

定理 2 设 $A\in RS_n(Q)$，则

$$m(A)-\left(\frac{t-1}{n-t+1}\right)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\lambda_t\leqslant m(A)+\left(\frac{n}{t}-1\right)^{\frac{1}{2}}s(A),\qquad t=1,2,\cdots,n.\tag{14.1}$$

且(14.1)左面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{t-1}$ 且 $\lambda_t=\cdots=\lambda_n$，(14.1)右面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_t$ 且 $\lambda_{t+1}=\cdots=\lambda_n$；

$$m(A)+(n-1)^{-\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\lambda_1\leqslant m(A)+(n-1)^{\frac{1}{2}}s(A).\tag{14.2}$$

且(14.2)左面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}$，(14.2)右面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_2=\cdots=\lambda_n$；

$$m(A)-(n-1)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\lambda_n\leqslant m(A)-(n-1)^{-\frac{1}{2}}s(A).\tag{14.3}$$

且(14.3)左面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}$，(14.3)右面等式成立$\Leftrightarrow\lambda_2=\cdots=\lambda_n$.

证明 在(12.1)，(12.2)中取 $l=t$，知(14.1)及其等式条件成立.

由 $\sum_{s=1}^{n}[\lambda_1-m(A)][m(A)-\lambda_s]=0$ 及(8)，(9)

$$n^2[\lambda_1-m(A)]^2=\sum_{s=1}^{n}(\lambda_1-\lambda_s)^2+\sum_{s\neq t}(\lambda_1-\lambda_s)(\lambda_1-\lambda_t)\geqslant n[s^2(A)+(\lambda_1-m(A))^2],$$

进而，$\lambda_1-m(A)\geqslant(n-1)^{-\frac{1}{2}}s(A)$且等式成立$\Leftrightarrow\sum_{s\neq t}(\lambda_1-\lambda_s)(\lambda_1-\lambda_t)=0\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}$. 这样由(14.1)知(14.2)及其左、右等式条件成立.

(14.3)及其等式成立条件的证明是类似的. □

当 $A\in RS_n(Q)$时，从(8)，(9)，(14.1)－(14.3)知

$$\frac{1}{n}\{\text{Re tr } A-\sqrt{(n-1)[n\text{Re tr } A^2-(\text{Re tr } A^2)]}\}\leqslant\lambda_t\leqslant\frac{1}{N}\{\text{Re tr } A+\sqrt{(n-1)[n\text{Re tr } A^2-(\text{Re tr } A^2)]}\},\quad t=1,2,\cdots,n. \tag{15}$$

$$|\lambda_t-\frac{\text{Re tr } A}{n}|\leqslant[\frac{n-1}{n}(\text{Re tr } A^2-\frac{(\text{Re tr } A)^2}{n})]^{\frac{1}{2}},\quad t=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

[7]是在 A 为"迹占优"的中心封闭阵的条件下得到(15)的. 当 A 为实对称阵时，可从(16)得[8]定理 3. 如果说[7]，[8]得到的是对自共轭、实对称阵的特征值域的整体估计，那么(14.1)－(14.3)所得到的是更为广泛的 $A\in RS_n(Q)$的每个实谱值的估计. 我们保持了[7]，[8]的特点，因而使估计式只与 Re tr A，Re tr A^2 有关，受[9]启发，本文的证明也较[7]，[8]简单.

由(8)，(9)，(14.1)－(14.3)易得

推论 1　设 $A\in RS_n(Q)$，则

$$m(A)+(n-1)^{-\frac{1}{2}}s(A)\leqslant m(A)+S(A)\leqslant\lambda_1\leqslant m(A)+(n-1)^{\frac{1}{2}}s(A)$$

或

$$m(A)-(n-1)^{\frac{1}{2}}s(A)\leqslant\lambda_n\leqslant m(A)-s(A)\leqslant m(A)-(n-1)^{\frac{1}{2}}s(A).$$

推论 2　设 $A\in RS_2(Q)$，则 A 的实谱值是唯一的且 $\lambda_1=m(A)+s(A)$，$\lambda_2=m(A)-s(A)$.

设 $A(\neq0)$是所有特征值皆为实数的 $n\times n$ 复矩阵且恰有 $p(q)$个正(负)特征值，[9]推论 2.2 如下，

当 tr $A\geqslant(\leqslant0)$时，$\frac{(\text{tr } A)^2}{\text{tr } A^2}\leqslant p(q)$(易知[9]的(2.36)式$\frac{(\text{tr } A)^2}{\text{tr } A^2}\geqslant p$ 中的"$\geqslant$"应改为"$\leqslant$")且等式成立$\Leftrightarrow A$ 的所有正(负)特征值相等且 A 的所有非正(非负)特征值相等.

由 $A=\begin{bmatrix}2&-1&1&-1\\0&2&2&-1\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$可知[9]推论 2.2 的(2.36)、(2.37)的等式成立的充分条件一般是不成立的.

定理 3　设 $A(\neq0)\in RS_n(Q)$，p,q 为 A 的正、负实谱值的个数. 则

$$\frac{(\text{Re tr } A)^2}{\text{Re tr } A^2}\leqslant p,\qquad \text{Re tr } A\geqslant0, \tag{17.1}$$

且等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p>0$ 且 $\lambda_{p+1}=\cdots=\lambda_n=0$；

$$\frac{(\text{Re tr } A)^2}{\text{Re tr } A^2}\leqslant q,\qquad \text{Re tr } A\leqslant0, \tag{17.2}$$

且等式成立$\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-q}=0$ 且 $\lambda_{n-q+1}=\cdots=\lambda_n<0$；

$$\frac{(\text{Re tr } A)^2}{\text{Re tr } A^2}\leqslant\max\{p,q\}\leqslant p+q\leqslant\text{rank } A. \tag{17.3}$$

证明　当 Re tr $A\geqslant0$ 时，由(8)、(9)、(14.1)，$0\geqslant\lambda_{p+1}\geqslant m(A)-(\frac{p}{n-p})^{\frac{1}{2}}s(A)$，整理得(Re tr

$A)^2 \leqslant p\ \mathrm{Re\ tr}\ A^2$. 即知(17.1)成立且等式成立$\Leftrightarrow 0 \geqslant \lambda_{p+1} \geqslant m(A) - (\frac{p}{n-p})^{\frac{1}{2}} s(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{p+1} = m(A) - (\frac{p}{n-p})^{\frac{1}{2}} s(A) = 0$. 这样由(14.1)左面等式成立条件知(17.1)等式成立$\Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p > 0$ 且 $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

类似可证明(17.2)及等式成立条件. 从(17.1),(17.2)可得(17.3). □

(17.1),(17.2)的等式条件可去修正[9]的错误. (17.3)推广、改进了[2]对中心封闭阵秩的下界估计(即修正后的[2]定理4). 从(6),(17.1),(17.2)可得.

推论 3 设 $A \in RS_n(Q)$, $\rho(A) = (\mathrm{Re\ tr}\ A)^2 - (n-1)\omega(A)$, $\delta(A) = (\mathrm{Re\ tr}\ A)^2 - (n-1)\mathrm{Re\ tr}\ A^2$. 那么

1) 若 $\mathrm{Re\ tr}\ A \geqslant 0$ 且 $t-1 < \frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{\omega(A)} \leqslant \frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{\mathrm{Re\ tr}\ A^2}$, 则 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_t > 0$;

2) 若 $\mathrm{Re\ tr}\ A \leqslant 0$ 且 $t-1 < \frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{\omega(A)} \leqslant \frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{\mathrm{Re\ tr}\ A^2}$, 则 $0 > \lambda_{n-t+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$;

3) 当 $\rho(A) > 0$ 或 $\delta(A) > 0$ 时, 有 $\lambda_s > (<) 0,\ s = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \mathrm{Re\ tr}\ A > (<) 0$.

当 A 为中心封闭阵时, 可从推论 3 的 3)得[2]修正后的定理 5 的(1). 当 $A \in SC_n(Q)$ 时, 从推论 3 的 3)可得[7]定理 4 的(i).

推论 4 设 $A \in RS_n(Q)$, 则

$\lambda_s \geqslant \frac{\delta(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A} \geqslant \frac{\rho(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A},\ s = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \mathrm{Re\ tr}\ A > 0$, 当 $\mathrm{Re\ tr}\ A \neq 0$ 时;

$\lambda_s \leqslant \frac{\delta(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A} \leqslant \frac{\rho(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A},\ s = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \mathrm{Re\ tr}\ A < 0$, 当 $\mathrm{Re\ tr}\ A \neq 0$ 时;

当 $\delta(A) > 0$ 时, 必有 $A \in GL_n(Q)$, $\mathrm{Re\ tr}\ A \neq 0$ 且 $\lambda_s > (<) \frac{\delta(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A} \geqslant (\leqslant) \frac{\rho(A)}{2\mathrm{Re\ tr}\ A},\ s = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \mathrm{Re\ tr}\ A > (<) 0$; $\lambda_s > (<) 0,\ s = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \mathrm{Re\ tr}\ A > (<) 0, \lambda \in R$.

证明 由(5)易知, $\delta(\lambda I - A) = n\lambda^2 - (2\mathrm{Re\ tr}\ A)\lambda + \delta(A)$, 由(4),(17.3)得

$$\delta(\lambda_s I - A) = n\lambda_s^2 - (2\mathrm{Re\ tr}\ A)\lambda_s + \delta(A) \leqslant 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, n. \tag{18}$$

由(18)易证推论 4. □

从 $\delta(A) \geqslant \rho(A)$ 知推论 4 推广、改进了修正后的[2]定理 5.

推论 5 设 $A = (a_{st}) \in SC_n(Q)$, $\varepsilon(A) = (\sum_{s=1}^{n} |a_{ss}|)^2 - (n-1)\mathrm{tr}\ A^2$. 则

$$r = \mathrm{rank}\ A \geqslant \frac{(\sum_{s=1}^{n} |a_{ss}|)^2}{\mathrm{tr}\ A^2} \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\ A)^2}{\mathrm{tr}\ A^2}, \tag{19}$$

如果 $\varepsilon(A) > 0$, 那么 $A \in GL_n(Q)$, $\delta(A) \neq 0$ 且 A 为不定的$(\lambda_1(A)\lambda_n(A) < 0) \Leftrightarrow \delta(A) < 0$, $A > (<) 0 \Leftrightarrow \delta(A) > 0$ 且 $\mathrm{tr}\ A > (<) 0$.

证明 由(1)可得(此时设(1)中 $U = (u_{st})$).

$$\sum_{s=1}^{n} |a_{ss}| \leqslant \sum_{t=1}^{n} |\lambda_t(A)| \sum_{s=1}^{n} N(u_{st}) = \sum_{t=1}^{n} |\lambda_t(A)|. \tag{20}$$

这样由(1),(2),(4),(5),(7),(20)及 Cauchy-Schuwarz 不等式，$r\ \mathrm{tr}\ A^2 = r\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A) \geqslant (\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|^2 \geqslant (\sum_{s=1}^{n}|a_{ss}|)^2 \geqslant (\mathrm{tr}\ A)^2$. 由此知(19)成立且知当 $\varepsilon(A)>0$ 时，$A\in GL_n(Q)$，由(1)知此时 $\lambda_s(A)\neq 0, s=1,2,\cdots,n$. 如果此时 $\delta(A)\leqslant 0$，由(1),(2),(20)，$(\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|)^2-(n-1)\mathrm{tr}\ A^2\geqslant\varepsilon(A)>0\geqslant\delta(A)=|\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)|^2-(n-1)\mathrm{tr}\ A^2$，即 $\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|>|\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)|$，因此

$$\lambda_1(A)>0>\lambda_n(A);\tag{21}$$

如果此时 $\delta(A)=0$，由(18)得

$$\lambda_s(A)[n\lambda_s(A)-2\mathrm{tr}\ A]\leqslant 0,\qquad s=1,2,\cdots,n;\tag{22}$$

这样从(21),(22)得 $0<\lambda_1(A)\leqslant\frac{2\mathrm{tr}\ A}{n}$ 且 $0>\lambda_n(A)\geqslant\frac{2\mathrm{tr}\ A}{n}$，这是不可能的. 这也就证明了当 $\varepsilon(A)>0$ 时，$\delta(A)\neq 0$ 且当 $\delta(A)<0$ 时，A 为不定的. 推论 5 的剩余结论易从推论 3 的 3)得到. □

(19)将[10]关于 Hermite 矩阵秩下界估计的最新结果([10]定理 4)推广到自共轭四元数矩阵上. 从 $\varepsilon(A)\geqslant\delta(A)$ 知推论 5 所要求条件比[7]定理 4 宽松且首次将讨论引入到不定的自共轭矩阵上. 推论 5 表明在 $\varepsilon(A)>0$ 条件下，[7]要求的“$\delta(A)>0$”是 $A>0$ 或 $A<0$ 的充要条件.

定理 4 设 $A\in RS_n(Q)$，则

$$\lambda_t-\lambda_l\leqslant(\frac{n}{t}+\frac{n}{n-l+1})^{\frac{1}{2}}s(A),\qquad 1\leqslant t\leqslant l\leqslant n,\tag{23}$$

且等式成立 $\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_t,\lambda_{t+1}=\cdots=\lambda_{l-1}=\frac{\mathrm{Re\ tr}\ A}{n},\ \lambda_l=\cdots=\lambda_n$.

证明 设 $\mu_1=\cdots=\mu_t=\frac{1}{t},\mu_{t+1}=\cdots=\mu_{l-1}=0,\mu_l=\cdots=\mu_n=-\frac{1}{n-l+1}$，则 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s=0$，$\sum_{s=1}^{n}\mu_s^2=\frac{1}{t}+\frac{1}{n-l+1}$ 且 $\sum_{s=1}^{n}\mu_s\lambda_s=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\lambda_s-\frac{1}{n-l+1}\sum_{s=l}^{n}\lambda_s$. 这样从(11)，$\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\lambda_s-\frac{1}{n-l+1}\sum_{s=l}^{n}\lambda_s\leqslant(\frac{n}{t}+\frac{n}{n-l+1})^{\frac{1}{2}}s(A)$. 又 $\lambda_t\leqslant\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\lambda_s,\lambda_l\geqslant\frac{1}{n-l+1}\sum_{s=l}^{n}\lambda_s$，即知(25)成立.

由(11)证明知 $|\sum_{s=1}^{n}\mu_s(\lambda_s-m(A))|=[\sum_{s=1}^{n}n\mu_s^2]^{\frac{1}{2}}s(A)\Leftrightarrow$ 有 $a\in R$ 使 $\mu_s=a[\lambda_s-m(A)]$，$s=1,2,\cdots,n$. 此时相当于 $\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\lambda_s-\frac{1}{n-l+1}\sum_{s=l}^{n}\lambda_s=(\frac{n}{t}+\frac{n}{n-l+1})^{\frac{1}{2}}s(A)\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_t,\lambda_{t+1}=\cdots=\lambda_{l-1}=m(A),\lambda_l=\cdots=\lambda_n$. 由此知(23)等式条件成立. □

推论 6 设 $A\in RS_n(Q)$，则

$$\max_{t\neq l}\{|\lambda_t-\lambda_l|\}\leqslant\sqrt{2}[\mathrm{Re\ tr}\ A^2-\frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{n}]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}[\omega(A)-\frac{(\mathrm{Re\ tr}\ A)^2}{n}]^{\frac{1}{2}}.$$

显然定理 4，推论 6 推广、改进了[2]相应结果.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰，任意体上可中心化矩阵的行列式，吉林大学自然科学学报，3(1980)，1—33.
[2] 屠伯埙，Schur 定理在四元数体上的推广，数学年刊，9(A)，2(1988)，130—138.
[3] 屠伯埙，强 p 除环上方阵的酉相似理论(Ⅲ)，数学研究与评论，1(1989)，1—7.
[4] 喻爱国、郭文彬，Schur 定理在四元数体上的推广，杨州师院学报(自)，1(1991)，1—8.
[5] 曹重光，四元数自共轭矩阵的几个定理，数学研究与评论，3(1988)，346—348.
[6] 杨忠鹏，四元数矩阵乘积的奇异值与特征值的不等式，数学研究与评论，4(1992)，617—622.
[7] 屠伯埙，四元数体上可中心化阵秩的下界及其各种应用，数学年刊，10A，2(1989)，158—164.
[8] Pablo Tarazaga, *Eigenvalue estimates for symmetric matrices*, Lin. Alg. Appl., 135(1990), 171—179.
[9] Henry Wolkowicz and George P. H. Styan, *Bounds for eigenvalues using traces*, Lin. Alg. Appl., 29(1980), 471—506.
[10] 屠伯埙，方阵的秩与"局部迹占优"阵的非异性，复旦学报(自)，1(1991)，84—90.

Estimation of Spectral Values of Quaternion Matrix with Real Spectral Values

Yang Zhongpeng

(Dept. of Maht., Jilin Teacher's College, Jilin)

Abstract

In this paper, we give a definition of quaternion matrix with real spectral values, and obtain several inequalities of spectral values of quaternions matrix with real spectral values. These inequalities only invelve the real part of trace of a quaternion matrix and the real part of trace of its square.