第14卷第3期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 3
1994年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1994

AP积分与Gronwall不等式*

王 才 士
(西北师范大学计算机系,兰州730070)

设 $\mathscr{T}_{ap}$ 表示实直线 R 上的密度拓扑(见[2]). 点 $x\in R$ 在密度拓扑 $\mathscr{T}_{ap}$ 下的邻域系记为 $\mathscr{U}_{ap}(x)$.

定义 称函数 f 在 $[a,b]$ 上满足 A—N 条件,如果对任何非空零测集 $E\subset[a,b]$ 及任意 $\varepsilon>0$,存在 $\mathscr{U}_{ap}(x)$,$x\in R$ 的一个选择 η: $\eta_x\in\mathscr{U}_{ap}(x)$,$x\in R$ 使得对 $[a,b]$ 的任何有限个互不重叠的 η 区间-点偶 $\{([u_i,v_i],\xi_i);i=1,2,\cdots,p\}$,当 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p\}\subset E$ 时,有 $\left|\sum_{i=1}^{p}[f(v_i)-f(u_i)]\right|<\varepsilon$.

引理 $[a,b]$ 上两个满足 A—N 条件的函数的乘积亦满足 A—N 条件.

引理 f 在 $[a,b]$ 上 AP 可积的充要条件是在 $[a,b]$ 上存在满足 A—N 条件的函数 F,使得 $D_{ap}F(x)=f(x)$ a.e. 于 $[a,b]$. 当 f 在 $[a,b]$ 上 AP 可积时,对上述函数 F,有 $(ap)\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$,$x\in[a,b]$.

利用上述两个引理可得下列 AP 积分的分部求积公式.

定理1 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上 AP 可积,记 $F(x)=C_1+(ap)\int_a^x f(t)dt$,$G(x)=C_2+(ap)\int_a^x g(t)dt$,$x\in[a,b]$,其中 C_1 和 C_2 为任意常数. 则函数 $Fg+fG$ 在 $[a,b]$ 上 AP 可积,并且对任何 $[u,v]\subset[a,b]$,有 $(ap)\int_u^v[F(x)g(x)+f(x)G(x)]dx=F(v)G(v)-F(u)G(u)$.

现设 $T>0$,以 AP$[0,T]$ 表示 $[0,T]$ 上的全体 AP 可积的实函数的类. 下一定理给出了 AP 可积函数类 AP$[0,T]$ 上的 Gronwall 型不等式.

定理2 设 $f\in$ AP$[0,T]$. 若存在常数 c 和 $k\geqslant0$,使得 $f(x)\leqslant c+k(ap)\int_0^x f(t)dt$,$x\in[0,T]$ 则 $f(x)\leqslant ce^{kx}$,$x\in[0,T]$.

注 在定理2中,当 $f(x)\leqslant c+k(ap)\int_0^x f(t)dt$,在 $[0,T]$ 上几乎处处成立时,$f(x)\leqslant ce^{kx}$ 在 $[0,T]$ 上亦几乎处处成立.

推论[1] 设 $T>0$,$f:[0,T]\to R$ 在 $[0,T]$ 上 Henstock 可积. 若存在常数 c 和 $k\geqslant0$,使得 $f(x)\leqslant c+k(H)\int_0^x f(t)dt$,$x\in[0,T]$,则 $f(x)\leqslant ce^{kx}$,$x\in[0,T]$.

参 考 文 献

[1] S. Schwabbik, *Rozpravy ceskoslove akad.* Ved Rada Mat., 95, 6(1985).

[2] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, 2nd Ed., Springer-Verlag(1980), 89—90.

* 1991年12月1日收到. 1993年3月29日收到修改稿.