第14卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 14 No. 3
1994年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1994

关于"Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces"一文的注记*

宋 光 兴
(石油大学数理系，山东东营市，257062)

摘　要　本文以反例说明，文[1]中的 fuzzy Banach contraction theorem 的证明是错误的.

关键词　Fuzzy 度量空间，Cauchy 序列，不动点.

在文[1]中，M. Grabiec 将普通度量空间上的 Banach 压缩定理推广到 fuzzy 度量空间，得到 fuzzy Banach 压缩定理. 然而，本文指出该定理的条件是不充分的，其证明是错误的.

[1]中之 fuzzy Banach 压缩定理如下：

定理　设$(X,M,*)$是完备 fuzzy 度量空间，

$$\lim_{t\to\infty} M(x,y,t)=1,\qquad \forall\, x,y\in X. \tag{5.1}$$

设$T:X\to X$满足

$$M(Tx,Ty,kt)\leqslant M(x,y,t),\qquad \forall\, x,y\in X,\ 0<k<1.$$

则T有唯一不动点.

文[1]中，该定理的证明，关键一步是：对任意正整数p，

$$M(x_n,x_{n+p},t)\geqslant \cdots M\left(x,x_1,\frac{t}{pk^n}\right)*\overset{(p)}{\cdots}*M\left(x,x_1,\frac{t}{pk^{n+p-1}}\right),$$

由(5.1)，有$\lim M(x_{n+p},x_n,t)\geqslant 1*\overset{(p)}{\cdots}*1=1$，即$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，于是收敛. ….

上面的证明是错误的，兹举一反例：

设(X,d)是一普通完备度量空间，定义M：

$$M:X\times X\times[0,\infty]\to[0,1],$$
$$M(x,y,t)=H(t-d(x,y)),\qquad \forall\, x,y\in X,\ t\geqslant 0,$$

其中$H(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0\end{cases}$. 易证：$(X,M,*)$是一完备 fuzzy 度量空间，

$$\lim_{t\to\infty} M(x,y,t)=1,\qquad \forall\, x,y\in X.$$

且有

命题　若$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，则

$$d(x_n,x)\to 0\Leftrightarrow M(x_n,x,t)\to 1,\qquad \forall\, t>0.$$

即$x_n\xrightarrow{d}x\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{M}x$.

特别，取$X=R=(-\infty,\infty)$，$d(x,y)=|x-y|$，

* 1992年1月3日收到.

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

显然,对任意正整数 p,

$$d(x_{n+p}, x_n) = |x_{n+p} - x_n| \to 0 \ (n \to \infty).$$

但$\{x_n\}$不是 Cauchy 序列,$\{x_n\}$不收敛.

由上命题易知,$(R, M, *)$为满足 fuzzy Banach 压缩定理条件的空间,且

$$M(x_{n+p}, x_n, t) \to 1, \qquad \forall\ t > 0\ (n \to \infty),$$

而$\{x_n\}$不是$(R, M, *)$中的 Cauchy 序列,$\{x_n\}$不收敛.

在此,我们想指出一点,fuzzy Banach 压缩定理的证明的错误在于 $\lim M(x_{n+p}, x_n, t) = 1, \forall\ t > 0$ 关于 p 不是一致的,从而$\{x_n\}$不是 Cauchy 序列.

仿[2]定理 9.3.25 的证明,我们可以得到:

$$M(x_n, x_{n+p}, t) \geqslant M(x, x_1, \frac{1-k}{k^n}t) * \overset{p}{\cdots} * M(x, x_1, \frac{1-k}{k^n}t).$$

在 fuzzy Banach 压缩定理中,若 $*$ 满足:

$$a * a \geqslant a, \qquad \forall\ a \in [0,1], \tag{1}$$

显然,$M(x_n, x_{n+p}, t) \geqslant M(x, x_1, \frac{1-k}{k^n}t) \to 1, \forall\ t > 0$. 即$\{x_n\}$是$(X, M, *)$中的 Cauchy 序列,fuzzy Banach 压缩定理成立.

若 $*$ 不满足(1),例如:

取 $*$:$a * b = \max\{a+b-1, 0\}, \forall\ a, b \in [0,1]$. 此时 $M(x_n, x_{n+p}, t) \geqslant p \cdot M(x, x_1, \frac{1-k}{k^n}t) - p + 1$,无法得到 $M(x_n, x_{n+p}, t) \to 1$ 关于 p 是一致的,从而得不到$\{x_n\}$为 Cauchy 序列.

若又取 $*$:$a * b = ab, \forall\ a, b \in [0,1]$,我们也无法得到$\{x_n\}$为 Cauchy 序列.

因此,要使 fuzzy Banach 压缩定理成立,其条件还需加强.

参 考 文 献

[1] M. Grabiec, *Fixed points in fuzzy metric spaces*, *Fuzzy Set and Systems*, 27(1988), 3:385—389.

[2] 张石生,不动点理论及应用,重庆出版社,(1984).

[3] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North—Holland, 1983.

Note on "Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces"

Song Guangxing

(University of Petroleum, Shandong 257062)

Abstract

We give a counterexample to show that a fuzzy Banach contraction theorem given in [1] is incorrect.