关于曲线上稳定秩2局部自由层在基变换下拉回的稳定性*

蔡 金 星
(华东师范大学数学系,上海200062)

摘 要 本文主要给出稳定秩2局部自由层在基变换下其拉回层不稳定的例.

关键词 代数曲线,基变换,稳定局部自由层.

设 ε 为光滑曲线 C 上秩2局部自由层,$f:P(\varepsilon)\to C$ 是 C 上直纹面.直纹 f 的截面自交数有一个下界,记为 $I(f)$.则 $I(f)>0$ 当且仅当 $\mathscr{E}$ 是稳定的(参见[1]或[2]).肖刚提出:当 $I(f)>0$ 时 $P(\varepsilon)$ 中是否存在非纤维的有效除子 D,使得 $D^2=0$? 下面的定理说明这个问题与曲线上秩2局部自由层在基变换下拉回的稳定性有关:

定理: 如下命题等价:

(1) $f:P(\varepsilon)\to C$ 为直纹,$I(f)>0$,$P(\varepsilon)$ 中存在非纤维的有效除子 D,$D^2=0$;

(2) ε 是 C 上稳定秩2局部自由层,存在基变换 $\pi:\tilde{C}\to C$,ε 在 π 下的拉回不是稳定的.

本文主要给出稳定秩2局部自由层在基变换下其拉回层不稳定的例(例7).所用记号,无特别说明,均与[2]同.

定义1 ε 为曲线 C 上秩2局部自由层,ε 称为正规的,如果 $h^0(\varepsilon)\neq 0$,且 $\forall\ \mathscr{L}\in \mathrm{Pic}\ C$,$\deg\mathscr{L}<0$,有 $h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{L})=0$.

性质2[2] 设 ε 是正规的,则 ε 是(半)稳定的当且仅当 $\deg\varepsilon>0(\geqslant 0)$.

定理3[1] 设 $\pi:\tilde{C}\to C$ 为曲线 $\tilde{C}$ 到 C 的有限基变换,ε 为 C 上半稳定局部自由层,则 $\pi^*\varepsilon$ 也是半稳定的.

性质4 设 $\pi:\tilde{C}\to C$ 为有限基变换,ε 为 C 上稳定秩2局部自由层,如果 $\deg\pi\cdot\deg\varepsilon E$ 是奇数,则 $\pi^*\varepsilon$ 是稳定的.

证明 设 $(\pi^*\varepsilon)\otimes\mathscr{L}$ 为 $\pi^*\varepsilon$ 的正规化,这里 $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}\ \tilde{C}$.则 $\deg(\pi^*\varepsilon)\otimes\mathscr{L}=2\deg\mathscr{L}+\deg\pi\cdot\deg\varepsilon\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,由性质2及定理3即得本命题.

性质5 设 $\pi:\tilde{C}\to C$ 为 n 次循环覆盖,由 $\mathscr{L}^{\otimes n}=\mathscr{O}_C(B)$ 定义,这里 $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}\ C$,$B$ 是 C 上有效除子.ε 为 C 上稳定秩2局部自由层.如果 $\deg\varepsilon$ 是偶数,则 $\pi^*\varepsilon$ 是稳定的.

证明 显然由假设存在 $\mathscr{F}\in\mathrm{Pic}\ C$,使得 $\deg\varepsilon\otimes\mathscr{F}=0$.由定义1及性质2可知 $h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{F})=0$.从而

$$\begin{aligned}h^0(\pi^*(\varepsilon\otimes\mathscr{F}))&=h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{F}\otimes\pi_*(\mathscr{O}_{\tilde{C}})\\&=h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{F}\otimes(\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{L}^{-1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}^{-(n-1)})=0.\end{aligned}$$

因此 $\pi^*(\varepsilon\otimes\mathscr{F})$ 不是正规的,从而存在 $\mathscr{M}\in\mathrm{Pic}\ \tilde{C}$,$\deg\mathscr{M}>0$,使得 $\pi^*(\varepsilon\otimes\mathscr{F})\otimes\mathscr{M}$ 是正规

* 1992年1月13日收到.

的. deg $\pi^*(\varepsilon\otimes\mathscr{F})\otimes\mathscr{M}>0$,由性质 2 命题得证.

性质 6 设 $\pi:\tilde{C}\to C$ 为由 $\mathscr{L}^{\otimes 2}=\mathscr{O}_C(B)$ 定义的 2 次覆盖,这里 $\mathscr{L}\in \mathrm{Pic}\,C$. B 为 C 上非负除子. 设 ε 为 C 上正规稳定局部自由层,$d=\deg\varepsilon$,$g(C)$ 为 C 的亏格. 如果 $\deg\mathscr{L}>g(C)-d$,则 $\pi^*\varepsilon$ 是稳定的.

证明 设 $(\pi^*\varepsilon)\otimes M$ 是 $\pi^*\varepsilon$ 的正规化,这里 $\mathscr{M}\in\mathrm{Pic}\,\tilde{C}$. 假设 $\pi^*\varepsilon$ 不是稳定的,则 $\deg(\pi^*\varepsilon)\otimes\mathscr{M}=0$,从而 $\deg\mathscr{M}=-d$. $\pi_*\mathscr{M}$ 是 C 上秩 2 局部自由层,由[2,P306,Ex2.6]可知 $\deg\pi_*\mathscr{M}=-d-\deg\mathscr{L}<0$.

设 $(\pi_*\mathscr{M})\otimes\mathscr{H}$ 是 $\pi_*\mathscr{M}$ 的正规化,这里 $\mathscr{H}\in \mathrm{Pic}\,C$. 则 $\deg(\mathscr{M}\otimes\pi^*\mathscr{H})\geqslant 0$. 由[2,P384,Ex2.5]可知 $\deg(\pi_*\mathscr{M})\otimes\mathscr{H}=2\deg\mathscr{H}+\deg\pi_*\mathscr{M}\leqslant g(C)$. 因此,由假设可得

$$\deg\mathscr{H}\leqslant\frac{1}{2}(g(C)-\deg\pi_*\mathscr{M})<d+\deg\mathscr{L}.$$

另一方面我们有正合列: $0\to\mathscr{O}_C\to(\pi_*\mathscr{M})\otimes\mathscr{H}\to\mathscr{G}\to 0$,这里 $\mathscr{G}\in\mathrm{Pic}\,C$. 张量 $\varepsilon\otimes\mathscr{H}^{-1}$ 得: $0\to\varepsilon\otimes\mathscr{H}^{-1}\to\varepsilon\otimes\pi_*\mathscr{M}\to\varepsilon\otimes\mathscr{G}\otimes\mathscr{H}^{-1}\to 0$. $\deg(\mathscr{G}\otimes\mathscr{H}^{-1})=\deg\mathscr{G}-\deg\mathscr{H}=\deg\pi_*\mathscr{M}+\deg\mathscr{H}<0$,由 ε 的正规性可知 $h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{H}^{-1})=h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{G}\otimes\mathscr{H}^{-1})=0$,从而 $h^0(\pi^*\varepsilon\otimes M)=h^0(\varepsilon\otimes\pi_*\mathscr{M})=0$,与假设 $\pi_*\varepsilon\otimes\mathscr{M}$ 是 $\pi^*\varepsilon$ 的正规化矛盾. 因此 $\pi^*\varepsilon$ 是稳定的.

例 7 设 C 为亏格大于零的曲线,$\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}\,C$,$\mathscr{L}^{\otimes 2}=\mathscr{O}_C$. 再设 $\pi:\tilde{C}\to C$ 为由 $\mathscr{L}^{\otimes 2}=\mathscr{O}_C$ 定义的 2 次覆盖,对于 $\tilde{C}$ 中任一点 p,命 $\varepsilon=\pi_*\mathscr{O}_{\tilde{C}}(p)$. 则 ε 是 C 上稳定秩 2 局部自由层,且 $\pi^*\varepsilon$ 不是稳定的.

显然 $h^0(\varepsilon)=h^0(\mathscr{O}_{\tilde{C}}(p))>0$,且 $\forall\ \mathscr{F}\in\mathrm{Pic}\,C$,$\deg\mathscr{F}<0$,由 $\deg(\mathscr{O}_{\tilde{C}}(p)\otimes\pi^*\mathscr{F})=1+2\deg\mathscr{F}<0$ 可知 $h^0(\varepsilon\otimes\mathscr{F})=h^0(\mathscr{O}_{\tilde{C}}(p)\otimes\pi^*\mathscr{F})=0$. 因此 ε 是正规的,由[2,P306,Ex2.6]可知 $deg\ \varepsilon=1$,从而由性质 2,ε 是稳定的.

我们有自然的非零态射 $\varphi:\ \pi^*\varepsilon\to\mathscr{O}_{\tilde{C}}(p)$. 从而有正合列 $0\to\mathscr{K}\to\pi^*\varepsilon\to\mathscr{C}\to 0$,这里 $\mathscr{K}=\ker\varphi$,$\mathscr{C}=\mathrm{coker}\,\varphi$ 是 $\tilde{C}$ 上可逆层,$\deg\mathscr{K}\geqslant 1$,$\deg\mathscr{C}\leqslant 1$. (事实上,$\deg\mathscr{C}=\deg\mathscr{K}=1$,$\varphi$ 是满射). 从而我们有正合列: $0\to\mathscr{O}_{\tilde{C}}\to\pi^*\varepsilon\otimes\mathscr{K}^{-1}\to\mathscr{C}\otimes\mathscr{K}^{-1}\to 0$. 因此,$h^0(\pi^*\varepsilon\otimes\mathscr{K}^{-1})\neq 0$,由 $\deg(\pi^*\varepsilon\otimes\mathscr{K}^{-1})=2-2\deg\mathscr{K}\leqslant 0$ 可知 $\pi^*\varepsilon\otimes\mathscr{K}^{-1}$ 是 $\pi^*\varepsilon$ 的正规化,且 $\deg\pi^*\varepsilon\otimes\mathscr{K}^{-1}=0$(因为由定理 3 $\pi^*\varepsilon$ 是半稳定的). 由性质 2,$\pi^*\varepsilon$ 不是稳定的.

感谢肖刚教授和陈志杰教授的指导和关心.

参 考 文 献

[1] 肖刚,代数曲面的纤维化,上海科学技术出版社,1992.

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer-Verlag. 1977.