欧氏空间中具有常典则支撑函数的子流形*

吴 炳 烨
(浙江师范大学数学系，金华321004)

摘 要 本文证明了下述结论：欧氏空间中完备连通且具有常典则支撑函数的子流形必为球面子流形或通过原点的线性子空间，从而改进了关于欧氏空间子流形的一个经典结果.

关键词 典则支撑函数，典则法向量.

本文中，我们始终假定 M 是 n 维欧氏空间 E^n 的完备连通的子流形. M 的位置矢量 x 可以分解为

$$x = x^{T} + x^{\perp}. \tag{1}$$

其中 x^{T} 与 $x^{\perp}$ 分别表示切向分量与法向分量. $x^{\perp}$ 的长度 $f=|x^{\perp}|$ 称为 M 的典则支撑函数. 当 $f\neq 0$ 时，$\eta=x^{\perp}/f$ 称为 M 的典则法向量[1].

对于欧氏空间中的子流形，一个很自然的问题是：在什么条件下它包含在某个原点为中心的超球面上？这方面的一个典型结果是：E^n 中完备连通子流形 M 位于某一以原点为中心的超球面上的充要条件为 M 的典则支撑函数 f 为非零常数，而且对应于典则法向量 η 的 Weingarten 变换 A_η 的行列式不恒为零([1], P. 60). 本文的目的在于改进上述结果，我们有

定理1 设 M 为 E^n 的完备连通子流形. 则 M 位于某个以原点为中心的超球面上的充要条件为 M 的典则支撑函数为非零常数.

证明 必要性不证自明. 下证充分性. 设 M 的典则支撑函数为非零常数. 令 $M_1=\{p\in M: x^{T}(pw)=0\}$，$M_2=M-M_1$，则 $M=M_1\cup M_2$. 我们先证 $M_1\neq\emptyset$. 这是因为函数 $r^2=\langle x,x\rangle$ 是定义在 M 上的非负函数，所以存在下确界 r_0^2. 由于 M 是完备的，必可在某点达到下确界 r_0^2. 由极值原理，在该点 $\mathrm{grad}\,r^2=\mathrm{grad}\langle x,x\rangle=0$，而易知 $\mathrm{grad}\langle x,x\rangle=2x^{T}$. 所以在该点 $x^{T}=0$，故 $M_1\neq\emptyset$.

下面我们证明 $M_2=\emptyset$. 为此，设 D 为 E^n 上的方向导数，X 为 M 的任一切向量场. 对 $x=x^{T}+f\eta$ 两边关于 X 求方向导数，得

$$\begin{aligned} X = D_X x &= D_X x^{T} + B(X,x^{T}) + fD_X\eta \\ &= \nabla_X x^{T} + B(X,x^{T}) + f(-A_\eta X + \nabla_X^{\perp}\eta), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ∇ 表示 M 上的 Riemann 联络，$B(\cdot,\cdot)$ 表示 M 的第二基本形式，而 $\nabla^{\perp}$ 则为 M 在 E^n 中的法联络. 比较切向分量和法向分量，得

$$x = \nabla_X x^{T} - fA_\eta X, \tag{3}$$

* 1991年11月4日收到.

$$B(X, x^{\mathrm{T}}) + f\nabla^{\perp}_{X}\eta) = 0. \tag{4}$$

(4)式两端与 η 作内积. 由于切向量 X 是任意的,故有

$$A_{\eta}x^{\mathrm{T}} = 0. \tag{5}$$

在(3)式中令 $X = x^{\mathrm{T}}$,结合(5)式,可得

$$x^{\mathrm{T}} = \nabla_{x^{\mathrm{T}}} x^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

假定 $M_2 \neq \varnothing$. 令 $g = |x^{\mathrm{T}}|$,则在 M_2 上,$g \neq 0$,且 $e = x^{\mathrm{T}}/g$ 处处存在. 将 $x^{\mathrm{T}} = ge$ 代入(6)式得

$$e = e(g)e + g\nabla_{e}e. \tag{7}$$

上式两端与 e 作内积,得 $e(g) = 1$,从而在 M_2 上,$|\mathrm{grad}g| \geqslant 1$,但在 M_1 上显然有 $|\mathrm{grad}g| = 0$,这样将在 M_1 与 M_2 公共边界上导致矛盾. 从而 $M_2 = \varnothing$,$M = M_1$,即在 M 上 $x^{\mathrm{T}} \equiv 0$,由此可得 $d\langle x, x\rangle = 0$ 或 $\langle x, x\rangle = \mathrm{constant}$,定理充分性获证.

对于典则支撑函数恒为零的情况,我们有

定理 2 设 M 是 E^n 的完备连通子流形. 则 M 的典则支撑函数恒为零的充要条件为 M 是 E^n 的线性子空间.

证明 充分性是显然的,下证必要性. 由于典则支撑函数恒为零,故位置向量 x 是切向量. 我们首先证明:若 $x_0 \in M$,$x_0 \neq 0$. 则从原点出发的射线 l:$\{tx_0 : t > 0\}$ 整个地包含在 M 中. 为此,考察定义在 M 上的切向量场 x 的积分曲线. 熟知,存在 M 上的曲线 $t \to x(t)$,$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,使 $x(0) = x_0$,$\frac{dx}{dt} = x(t)$. 而方程 $\frac{dx}{dt} = x(t)$ 在初始条件 $x(0) = x_0$ 下的解是 $x(t) = e^t x_0$. 这说明射线 l 上有了一个包含 x_0 的开区间落在 M 上. 由完备性知 l 上有一个包含 x_0 的闭区间落在 M 上. 如果 l 不全落在 M 上,则存在闭区间 $[a, b]$ 使 $x_0 \in l|[a, b] \subset l|(0, \infty)$,且 $[a, b]$ 是使 $l|[a, b]$ 落在 M 上的最大的包含 x_0 的闭区间. 但是经过 ax_0 与 bx_0 的积分曲线显然也是 l 上的一段,这与 $[a, b]$ 的最大性矛盾. 所以 $l \subset M$,而且 $0 \in M$. 这证明 M 是以原点为顶点的一个锥面,而且该锥面一定是 E^n 的线性子空间,否则原点处的切空间将不存在. 所以定理成立.

参 考 文 献

[1] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, 1973.

Submanifolds in Euclidean Space with Constant Canonical Support Function

Wu Bingye

(Dept. of Math., Zhejiang Normal University, Jinhua)

Abstract

In this paper we prove a result as following: A complete connected submanifold in euclidean space with constant canonical support function is a spherical submanifold or a linear subspace.