第14卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

自反和超自反子空间格*

李　建　奎
(南京大学数学系，南京 210008)

摘　要　本文讨论了子空间格的序和、序积的自反和超自反性以及它们对应的代数的超自反性.

关键词　自反子空间格，超自反子空间格，格的序积，格的序和.

§1　引　言

在[1]中，Arveson 引入了超自反代数的概念，这一概念在研究 nest 代数紧扰动和 nest 的分类中起着重要的作用. 作为超自反代数的对应，Davidson 和 Harrison[2] 引入了超自反子空间格的概念. 关于自反代数，自反格，超自反代数，超自反格的研究在非自伴代数中占有重要的地位.

本文中，H 表示复 Hilbert 空间，$J(H)$ 表示 H 所有闭子空间全体所构成的格，所有投影为正交投影. $\mathscr{L}\subseteq J(H)$ 称为一子空间格，若 $\mathscr{L}$ 是完备格并且包含 $\{0\}$ 和 H. 若 $x\in H_1, y\in H_2$，$B(H_1,H_2)$ 中的秩 1 算子 $e\rightarrow(e,x)y$ 记为 $x\otimes y$. 本文沿用[2]中的定义和符号.

§2　子空间格的序积和序和

定义 2.1　若 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是 H 的子空间格，$\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 的序积 $\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$ 定义为

$$\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2=\{L\oplus M\mid L\in\mathscr{L}_1, M\in\mathscr{L}_2, L\geqslant M\}.$$

定义 2.2　若 $\mathscr{L}_i$ 是 H_i 的子空间格，序和 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$，直积 $\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2$ 的定义分别为

$$\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2=\{L\oplus 0\mid L\in\mathscr{L}_1\}\cup\{H_1\oplus M\mid M\in\mathscr{L}_2\},$$

$$\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2=\{L\oplus M\mid L\in\mathscr{L}_1, M\in\mathscr{L}_2\}.$$

注 1　若 $\mathscr{L}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的子空间格，用归纳法相似于[4]可证 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\cdots+\mathscr{L}_n$ 是自反的充要条件是每个 $\mathscr{L}_i$ 是自反的.

定理 2.3　若 $\mathscr{L}$ 是 H 的子空间格，并且 $\mathscr{L}$ 有一非平凡的可比较元 P，则 $(\mathrm{alg}\,\mathscr{L})'=CI$.

证明　令 $\mathscr{L}_1=\{M\mid M\subseteq P, M\in\mathscr{L}\}$，$\mathscr{L}_2=\{MP^{\perp}\mid M\in\mathscr{L}\}$，我们有 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$，这时

$$\mathrm{alg}\,\mathscr{L}=\left\{\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\middle|\, A\in\mathrm{alg}\,\mathscr{L}_1, B\in\mathrm{alg}\,\mathscr{L}_2, C\in B(P^{\perp}H, PH)\right\}.$$

---

* 1991年11月8日收到. 94年6月25日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

令 $H_1=PH, H_2=P^{\perp}H$，这时 $H=H_1\oplus H_2$. $\forall\ M=(A_{ij})\in(\mathrm{alg}\ \mathscr{L})'$，$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in C$，令 $M_{\lambda_1,\lambda_2}=\lambda_1 I_{H_1}\oplus\lambda_2 I_{H_2}$，显然 $M_{\lambda_1,\lambda_2}\in\mathrm{alg}\ \mathscr{L}$，这样就有 $MM_{\lambda_1,\lambda_2}=M_{\lambda_1,\lambda_2}M$，因此 $M=A_{11}\oplus A_{22}$. 又因为 $\forall\ C\in B(H_2,H_1)$，$A_{11}C=CA_{22}$，我们易证 $A_{11}=\lambda I_{H_1}$，$A_{22}=\lambda I_{H_2}$，即 $M=\lambda I$，所以 $(\mathrm{alg}\ \mathscr{L})'=CI$. 证毕.

定理 2.4 若 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是 H 的子空间格，则 $\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$ 是自反的充要条件是 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是自反的.

证明 若 $\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$ 是自反的. $\forall\ M\in\mathrm{lat\ alg}\ \mathscr{L}_1$，令 $\widetilde{M}=M_1\oplus 0$ 时，$\widetilde{M}\in\mathrm{lat\ alg}(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)$，由于 $\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$ 自反，所以 $\widetilde{M}\in\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$，这样 $M\in\mathscr{L}_1$. 故 $\mathscr{L}_1$ 是自反的. 相似地可证明 $\mathscr{L}_2$ 是自反的.

反过来，若 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是自反的，$\forall\ M\in\mathrm{lat\ alg}(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)$，$S(M)\subseteq M$，所以 $M=M_1\oplus M_2$ 并且 $M_i\in\mathscr{L}_i(i=1,2)$. 再由

$$\widetilde{S}=\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{alg}(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2),$$

$\widetilde{S}(M_1\oplus M_2)\subseteq M_1\oplus M_2$，可知 $M_1\supseteq M_2$. 因此 $M_1\oplus M_2\in\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$，故 $\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$ 是自反的. 证毕.

引理 2.5 若 S_{ii} 是 $B(H_i)$ 的子空间，$i<j$ 时 $S_{ij}=B(H_j,H_i)$，$i>j$ 时 $S_{ij}=0$. 令 $H=\sum_{i=1}^{\infty}\oplus H_i$，$S=\{(a_{ij})\in B(H)\,|\,a_{ij}\in S_{ij}\}$. 则 S 是超自反的充要条件是 S_{ii} 是超自反的并且 $\sup\{K(S_{ii})\}<\infty$.

我们将证明留给读者.

定理 2.6 若 $\mathscr{L}_i$ 是 $H_i(i=1,2,\cdots)$ 的子空间格，$H=\sum_{i=1}^{\infty}\oplus H_i$，$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\cdots+\mathscr{L}_n+\cdots$. 则

(1) $\mathscr{L}$ 是自反的充要条件是每个 $\mathscr{L}_i$ 是自反的.

(2) $\mathrm{alg}\ \mathscr{L}$ 是超自反的充要条件是每个 $\mathrm{alg}\ \mathscr{L}_i$ 是超自反的并且 $\sup\limits_i\{k(\mathrm{alg}\ \mathscr{L}_i)\}<\infty$.

证明 (1) 若每个 $\mathscr{L}_i$ 是自反的，$\forall\ M\in\mathrm{lat\ alg}\ \mathscr{L}$，$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n\oplus\cdots$，若 M_i 是 $\{M_i\}$ 中第一个满足 $M_i\neq H_i$，因为 $M\in\mathrm{lat\ alg}\ \mathscr{L}$. 我们有 $\widetilde{M}=M_1\oplus\cdots\oplus M_i\oplus M_{i+1}\in\mathrm{lat\ lag}(\mathscr{L}+\cdots+\mathscr{L}_{i+1})$. 由注 1 可知 $\mathscr{L}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}_{i+1}$ 是自反的，这样就有 $M_{i+1}=0$. 同理可证 $M_{i+j}=0(j\geqslant 1)$. 故 $M\in\mathscr{L}$. 由于 $M=H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus\cdots\in\mathscr{L}$ 是显然的，这样就证明了 $\mathscr{L}$ 是自反的.

反过来，若 $M\in\mathrm{lat\ alg}\mathscr{L}_i$ 时，令 $\widetilde{M}=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_{i-1}\oplus M\oplus 0\cdots$，$\widetilde{M}\in\mathrm{Lat\ alg}\ \mathscr{L}$. 由 $\mathscr{L}$ 自反可知 $M\in\mathscr{L}_i$. 故 $\mathscr{L}_i$ 是自反的.

(2) 因为

$$\mathrm{alg}\ \mathscr{L}=\left\{\left(\begin{matrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & *\\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots\end{matrix}\right)\middle|\ a_{ii}\in\mathrm{alg}\ \mathscr{L}_i,\ i=1,2,\cdots\right\},$$

由引理 2.5 可知 $\mathrm{alg}\ \mathscr{L}$ 是超自反的充要条件是 $\mathrm{alg}\ \mathscr{L}_i$ 是超自反的并且 $\sup\limits_i\{k(\mathrm{alg}\ \mathscr{L}_i)\}<\infty$. 证毕.

定理 2.7 若 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是 H 的子空间格，$\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}_2$ 的子格或 $\mathscr{L}_2$ 是 $\mathscr{L}_1$ 的子格，则 alg

$(\mathscr{L}_1 \geqslant \mathscr{L}_2)$是超自反的充要条件是每个 alg $\mathscr{L}_i$ 是超自反的.

证明 若(i) $\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}_2$ 的子格,这时

$$\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1 \geqslant \mathscr{L}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b \in \operatorname{alg} \mathscr{L}_1, c \in \operatorname{alg} \mathscr{L}_2 \right\}.$$

若(ii) $\mathscr{L}_2$ 是 $\mathscr{L}_1$ 的子格,我们有

$$\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1 \geqslant \mathscr{L}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a \in \operatorname{alg} \mathscr{L}_1, b,c \in \operatorname{alg} \mathscr{L}_2 \right\}.$$

无论(i)或(ii)成立时,由定理 4.7[1] 可知 $\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1 \geqslant \mathscr{L}_2)$超自反的充要条件是 alg $\mathscr{L}_1$ 和 alg $\mathscr{L}_2$ 是超自反的.

§3 子空间格的超自反性

在这一部分我们讨论子空间格的超自反性,关于它的定义见[2].

引理 3.1 若 $\mathscr{L}_i$ 是 $H_i(i=1,2)$的子空间格,则 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 是超自反的充要条件是 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是超自反的.

证明 若 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 是超自反的, $\forall\ P_1 \in J(H_1)$,考虑 $P=P_1 \oplus 0$. 这时

$$\begin{aligned} d(P_1,\mathscr{L}_1) &= d(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) = k(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)\beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) \\ &\leqslant k(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)\beta(P_1,\mathscr{L}_1). \end{aligned}$$

故 $\mathscr{L}_1$ 是超自反的,同理可证 $\mathscr{L}_2$ 是超自反的.

反之若 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是超自反,由定理 7.1[2] 可知 $\mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2$ 是超自反的. 若记 $k=\max\{K(\mathscr{L}_1),k(\mathscr{L}_2)\}$,令 $M=2+5k$. $\forall\ P \in J(H_1 \oplus H_2)$,

$$d(P,\mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2) \leqslant M\beta(P,\mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2).$$

因为 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2$,所以

$$\beta(P,\mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2) \leqslant \beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2),$$
$$d(P,\mathscr{L}_1 \times \mathscr{L}_2) \leqslant M\beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2).$$

若 $\beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)<\eta$ 时, $\exists\ Q=Q_1 \oplus Q_2 \in \mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$,满足 $\|P-Q\|<M\eta$.

$$\begin{aligned} d(Q,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) &= \begin{cases} d(Q_1,\mathscr{L}_1) & Q_2=0 \\ d(Q_2,\mathscr{L}_2) & Q_1=H_1, Q_2 \neq 0 \\ 1 & Q_1 \neq H_1, Q_2 \neq 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} k\beta(Q_1,\mathscr{L}_1) & Q_2=0 \\ k\beta(Q_2,\mathscr{L}_2) & Q_1 \neq 0, Q_1=H_1 \\ 1 & Q_1 \neq H_1, Q_2 \neq 0 \end{cases} \\ &\leqslant \max\{k,1\}\beta(Q_1 \oplus Q_2,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) \leqslant (k+1)\beta(Q_1 \oplus Q_2,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) &\leqslant \|P-Q\| + d(Q,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) \leqslant \|P-Q\| + (K+1)\beta(Q,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) \\ &\leqslant \|P-Q\| + (K+1)[2\|P-Q\| + \beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)] \\ &\leqslant [M+(k+1)(2M+1)]\eta. \end{aligned}$$

由 η 的任意性可知 $d(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2) \leqslant [M+(k+1)(2M+1)]\beta(P,\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$,故 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 是超自反的. 证毕.

类似于上面引理我们可证明下面的结果

定理 3.2 若 $\mathscr{L}_i$ 是 H_i 的子空间格, $H=\sum_{i=1}^{\infty} \oplus H_i$, $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2+\cdots$,则 $\mathscr{L}$ 是超自反

的充要条件是每个$\mathscr{L}_i$是超自反的并且$\sup\{k(\mathscr{L}_i)\}<\infty$.

定理 3.3　若$\mathscr{L}_i$是H的子空间格并且$\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$是超自反的，则$\mathscr{L}_1$和$\mathscr{L}_2$是超自反的.

证明　因为$\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2$是超自反的，$\forall\ P\in J(H)$，

$$d(P,\mathscr{L}_1)=d(P\oplus 0,\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\leqslant k(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\beta(P,\mathscr{L}_1).$$

$$\begin{aligned}d(P,\mathscr{L}_2)&=d(I\oplus P,\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\leqslant k(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\beta(I\oplus P,\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\\&\leqslant k(\mathscr{L}_1\geqslant\mathscr{L}_2)\beta(P,\mathscr{L}_2).\end{aligned}$$

故$\mathscr{L}_1$和$\mathscr{L}_2$是超自反的. 证毕.

我们不知道是否定理 3.3 的逆成立.

作者对于王声望教授的鼓励和帮助表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] W. B. Arveson, *Ten lectures in operator algebras*, CBMS Regional Conference Series, No. 55, A. M. S., Providence, 1984.

[2] K. R. Davidson and K. J. Harrison, *Distance formulae for subspace lattices*, J. London Math. Soc. (2), 39 (1989), 309—323.

[3] K. R. Davidson, *Nest Algebras*, Research Notes in Math. 191, Pitman, Boston-London Melbourne, 1988.

[4] P. R. Halmos, *Reflexive lattices of subspaces*, J. London Math. Soc. (2), 4(1971), 257—263.

[5] J. Kraus and D. R. Larson, *Reflexivity and distance formulate*, Proc. London Math. Soc. 53(1986), 340—356.

[6] M. S. Lambrou, *On the rank of operators in algebras*, Linear Algebra Appl. 142(1990), 211—235.

[7] M. S. Lambrou, *Approximants, commutants and double commutants in normed algebras*, J. London Math. Soc. (2), 25(1982), 499—512.

Reflexive and Hyperreflexive Subspace Lattices

Li Jiankui

(Dept. of Math., Nanjing University)

Abstract

In this paper, we discuss reflexivity and hyperreflexivity of the ordinal sum and the ordered product of subspace lattices.