第14卷第4期 1994年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 4 Nov. 1994

局部H—凸空间及其不动点定理*

张石生（四川大学数学系，成都610064）
向淑文（贵州大学数学系，贵阳550025）

摘　要　本文引入局部H—凸空间的概念，并得出局部H—凸空间上映象的两个不动点定理. 它们包含著名的Schauder不动点定理和Browder不动点定理为特例.

关键词　H—凸空间，Scdauder不动点定理，Browder不动点定理.

1. 引言及预备知识

近半个世纪以来，人们一直致力于把局部凸空间中的不动点定理推广到更一般的拓朴空间，比如引文[1]，[2]就是这样的例子. 最近，Bardaro，Ceppitelli在[4]中引入H—空间的概念，并借助于KKM定理在引文[5,6]中最先建立了H—空间上映象的不动点定理. 以后在引文[7]中作者们还进一步在H—空间上建立了几个不动点定理和重合定理.

本文的目的是通过引入局部H—凸空间的概念，而不借助KKM技巧，在H—空间中给出了两个不动点定理，它们包含著名的Schauder不动点定理和Browder不动点定理为特例.

定义1[4]　设X是一拓朴空间，$\{\Gamma_A\}$是X中给定的可缩子集族，并用X中一切有限子集A来编号，且当$A,B\subset X$为二有限子集，$A\subset B$时，则有$\Gamma_A\subset\Gamma_B$，则称序对$(X,\{\Gamma_A\})$为H—空间.

注　正如[4]中所指出的，任何Hausdorff拓朴线性空间，凸空间[8]，可缩空间等都是H—空间的特例.

定义2　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H—空间，集$D\subset X$称关于集$C\subset X$是H—凸的，如果对任一有限集$A\subset C$，有$\Gamma_A\subset D$. 当$C=D$时，称D是H—凸的.

下面我们给出局部H—凸空间的概念.

定义3　(i)　一H—空间$(X,\{\Gamma_A\})$称为局部H—凸的，如果对每一$x\in X$及x的每一开邻域U，存在x之一开邻域V，使得U关于V是H—凸的.

(ii)　设X为一度量空间，D为X之一非空子集，如果对每一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任一$x\in D$，$B_\varepsilon(x)$关于$B_\delta(x)$为H—凸的，则称D为$(X,\{\Gamma_A\})$的一一致局部H—凸子集. 如果$X=D$，则X称为一致局部H—凸空间，其中$B_r(x)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$.

注　不难验证局部凸线性拓朴空间E为局部H—凸空间. 事实上，只需对任一有限集$A=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset E$，定义$\Gamma_A=\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$，则$(E,\{\Gamma_A\})$即为局部H—凸空间. 另外，若E为赋范空间，则E为一致局部H—凸空间.

* 1991年10月14日收到. 国家自然科学基金资助课题.

引理 1[3]　设$(X,\{\Gamma_A\})$是一 H－空间，$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个点(不必相异)，则对标准的$(n-1)$-单形 $e_1\cdots e_n$，存在连续映象 $f:e_1\cdots e_n\to X$，使得

$$f(e_{i_1}\cdots e_{i_k})\subset\Gamma_{\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}},$$

其中$\{i_1,\cdots,i_k\}$是$\{1,\cdots,n\}$中任一非空子集.

2. 主要结果

引理 2　设(X,d)为一度量空间，$(X,\{\Gamma_A\})$为局部 H－凸空间，D 为 X 中的紧子集. 则 D 为 X 的一致局部 H－凸子集.

证明　对每一 $x\in D$，及对任给的 $\varepsilon>0$，因$(X,\{\Gamma_A\})$是局部 H－凸的，故存在 $\delta_x>0$，不妨设 $\delta_x<\varepsilon$，使得 $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$关于 $B_{\delta_x}(x)$为 H－凸的，即对任给的有限集 $A\subset B_{\delta_x}(x)$，有 $\Gamma_A\subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$.

另因 $D\subset\bigcup_{x\in D}B_{\delta_{x_i}/2}(x)$，其中 $\delta_x<\varepsilon$，$\forall\ x\in D$，且 D 为紧集，故存在有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset D$，使得

$$D\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_{\delta_{x_i}/2}(x_i).$$

令 $\delta=\min\{\delta_{x_i}/2,i=1,\cdots,n\}$. 下证对任一有限集 $A\subset B_\delta(x)$有 $\Gamma_A\subset B_\varepsilon(x)$，其中 x 为 D 中任地点.

事实上，对任给的 $x\in D$，存在 $i\in\{1,\cdots,n\}$，使得 $x\in B_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$. 因 $A\subset B_\delta(x)$，故

$$A\subset B_{\delta_{x_i}/2}(x)\subset B_{\delta_{x_i}/2}(B_{\delta_{x_i}/2}(x_i))=B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

再由 $B_{\delta_{x_i}}(x_i)$的取法及 $\delta_{x_i}<\varepsilon$ 的假定，得知

$$\Gamma_A\subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B_{\delta_{x_i}/2}(x))\subset B_\varepsilon(x).$$

结论得证.

下面给出本文的主要结果.

定理 1　设(X,d)为一度量空间，$(X,\{\Gamma_A\})$为局部 H－凸空间，D 为$(X,\{\Gamma_A\})$中的非空紧子集，且 D 为 H－凸的. 设 $P:D\to D$ 连续，则 P 在 D 中有不动点.

证明　由引理 2，D 为$(X,\{\Gamma_A\})$之一一致局部 H－凸子集. 故对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $\eta>0$，$\eta<\varepsilon$，使得 $B_\varepsilon(x)$关于 $B_\eta(x)$为 H－凸的.

另由 $P:D\to D$ 的连续性，存在 x 的邻域 $B_{\delta_x}(x)$使得 $P(B_{\delta_x}(x))\subset B_\eta(P(x))$. 再由 D 紧及 $D\subset\bigcup_{x\in D}B_{\delta_x}(x)$，存在$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset D$，使得 $D\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. 对于 D 的开覆盖$\{B_{\delta_{x_i}}(x_i):i=1,\cdots,n\}$，必存在与之相对应的连续单形分解$\{\beta_i(x):i=1,\cdots,n\}:D\to[0,1]$. 现取一标准的$(n-1)$单形 $\Delta_{n-1}=\{e_1\cdots e_n\}$，作映象如下：

$$g:D\to\Delta_{n-1},\quad g(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)e_i,x\in D.$$

易知 $g:D\to\Delta_{n-1}$ 连续. 另由引理 1 存在 $f:\Delta_{n-1}\to D$ 其为一连续映象，且满足

$$f(e_{i_1}\cdots e_{i_k})\subset\Gamma_{P(x_{i_1}),\cdots,P(x_{i_k})},$$

其中$\{i_1,\cdots,i_k\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$中任一非空子集.

现考察映象 $g\circ f:\Delta_{n-1}\to\Delta_{n-1}$. 因 $g\circ f$ 连续，故由 Brouwer 不动点定理，存在 $e\in\Delta_{n-1}$，使得

$g\circ f(e)=e$. 令 $f(e)=x_\varepsilon$，则 $x_\varepsilon\in D$，且 x_ε 为 $f\circ g$ 的不动点.

另对每一 $x\in D$，令 $I(x)=\{i\in\{1,\cdots,n\}:\beta_i(x)>0\}$. 故

$$f\circ g(x)=f(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)e_i)=f(\sum_{i\in I(x)}\beta_i(x)e_i)\subset\Gamma_{\{P(x_i),i\in I(x)\}}. \tag{2.1}$$

由 $i\in I(x)$，故 $\beta_i(x)>0$，即 $x\in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. 再由 $B_{\delta_x}(x)$ 的取法知 $P(B_{\delta_{x_i}}(x_i))\subset B_\eta(P(x_i))$. 故知

$$P(x)\in P(B_{\delta_{x_i}}(x_i))\subset B_\eta(P(x_i)),\forall\ i\in I(x). \tag{2.2}$$

另由 $P(x)\in B_\eta(P(x_i))$，$i\in I(x)$ 得知 $P(x_i)\in B_\eta(P(x))$. 因 $B_\varepsilon(P(x))$ 关于 $B_\eta(P(x))$ 是 H－凸的，于是有 $f(g(x))\in\Gamma_{\{P(x_i),i\in I(x)\}}\subset B_\varepsilon(P(x))$.

综上所述，对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$x_\varepsilon=f(g(x_\varepsilon))\in B_\varepsilon(P(x_\varepsilon)).$$

现取 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$，则对每一 $\varepsilon_n>0$，存在 $x_n\in D$，使得 $x_n\in B_{\varepsilon_n}(P(x_n))$，即 $d(x_n,P(x_n))<\varepsilon_n$. 因 D 紧，$\{x_n\}$ 存在收敛子列，不妨仍记为 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x_0$. 于是由 $d(x_n,P(x_n))<\varepsilon_n$. 故 $P(x_n)\to x_0$. 因 P 连续，于是有 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}P(x_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=P(x_0)$. 即 $x_0\in D$ 为 P 的不动点. 证毕.

由定理 1 可得著名的 Schauder 不动点定理.

定理 2(Schauder)　设 D 为赋范空间 E 的紧凸子集，设 $P:D\to D$ 连续. 则 P 在 D 中有不动点.

现在我们给出一个例子.

例　现考虑平面上的圆 $S=\{x\in R^2,|x|=r\}$，$|\cdot|$ 表 R^2 上的欧氏距离.

如右图所示，取定 $x_0\in S$，对 S 中的任一有限集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，定义 Γ_A 为联结 $x_1,\cdots,x_n$ 的弧段，联接方式为：沿逆时针方向，从离 x_0 最近的点开始，按顺时针方向把这些点联结起来. 按此作法，$(S,\{\Gamma_A\})$ 构成 H－空间，但这一空间不是局部 H－凸的. 事实上，对 x_0 的任一不包含整个圆 S 的邻域 U，均找不到 x_0 的一个邻域 V，使得 U 关于 V 为 H－凸的. 另外不难知道，S 不具有不动点性质，即存在连续映象 $f:S\to S$，但 f 不存在不动点.

以上例子表明，仅在 H－凸空间考虑问题是得不到定理 1 的结论的.

最后，我们在 H－空间中证明一个类似于 Browder 不动点定理的结论.

定理 3　设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 是一 H－空间，$D\subset X$ 为一非空紧子集且为 H－凸的，$T:D\to 2^D$ 为一集值映象. 若对每一 $x\in D$，$T(x)$ 为非空 H－凸的且 $T^{-1}(x)$ 是开的. 则存在 $x_0\in D$，使得 $x_0\in Tx_0$.

证明　因 T 是非空 H－凸值映象，故 $D\subset\bigcup\limits_{y\in D}T^{-1}(y)$. 因 D 紧且 $T^{-1}(y)$ 开，故存在有限集 $\{y_1,\cdots,y_n\}$，使得 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}T^{-1}(y_i)$，且相对于有限开覆盖 $\{T^{-1}(y_i)\}_{i=1}^{n}$ 存在一连续单位分解 $\{\beta_i(x):i=1,\cdots,n\}$.

取一标准的 $(n-1)$ 单形 $\Delta_{n-1}=\{e_1\cdots e_n\}$. 作映象 $g:D\to\Delta_{n-1}$，$g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i(x)e_i$，$x\in D$，则 $g:D\to\Delta_{n-1}$ 连续. 另由引理 1，存在连续映象 $f:\Delta_{n-1}\to\Gamma_{\{y_1,\cdots,y_n\}}\subset D$，使得

$$f(e_{i_1}\cdots e_{i_k})\subset \Gamma_{\{y_{i_1}\cdots y_{i_k}\}}\subset D.$$

于是复合映象 $g\circ f:\Delta_{n-1}\to\Delta_{n-1}$ 在 Δ_{n-1} 中有不动点，设为 e，令 $x_0=f(e)$，则 x_0 是 $f\circ g:D\to D$ 的不动点.

下证 $f\circ g$ 为 T 的连续选择.

事实上，对每一 $x\in D$ 有 $f\circ g(x)=f(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)e_i)\in\Gamma_{\{y_i,i\in I(x)\}}$，其中 $I(x)=\{i\in\{1,\cdots,n\}:\beta_i(x)>0\}$. 于是对每一 $i\in I(x)$，由 $\beta_i(x)>0$ 知 $x\in T^{-1}(y_i)$，即 $y_i\in T(x)$，$\forall\ i\in I(x)$. 由 $T(x)$的 H 一凸性，故 $\Gamma_{\{y_i,i\in I(x)\}}\subset T(x)$.

定理得证.

由定理 3 特别可得

定理 4(Browder)　设 X 为一线性拓朴空间 E 中之一非空紧凸子集. 设 $T:X\to 2^X$ 是一集值映象，且对每一 $x\in E$，$T(x)$是非空凸的，$T^{-1}(x)$是开的，则 T 在 X 中存在不动点.

参 考 文 献

[1] L. Pasicki, Proc. Amer. Math. Soc. ,83(1981),781—789.

[2] Olga Hadzic, Internat. J. Math. & Math. Soc. ,10:3(1987),453—460.

[3] C. Horvath, in Nonlinear and Convex Analysis, Lecture Notes in Pure and Appl. Math Series, 107(1987).

[4] C. Bardaro & R. Ceppitelli, J. Math. Anal. Appl. , 132(1988),484—490.

[5] C. Bardaro, J. Math. Anal. Appl. , 137(1989),46—58.

[6] C. Bardaro, J. Math. Anal. Appl. ,146(1990),393—393.

[7] Shih—sen Chang & Yi—hai Ma, J. Math. Anal. Appl. ,163,No2(1992),406—421.

[8] M. Lassonde, J. Math. Anal. Appl. ,97(1983)151—201.

Locally H-Couvex Spaces and Related Fixed Point Theorem

Zhang Shisheng

(Dept. of Math., Sichuan University, Chengdu)

Xiang Shuwen

(Dept. of Math., Guizhou Normal University, Guiyang)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce the concept of locally H-convex space and to obtain two fixed point theorems for mappings on it. These two fixed point theorems extend the famous Schauder's and Browder's fixed point theorems.