第14卷第4期
1994年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 4
Nov. 1994

Hadžic 不动点定理的改进*

方 锦 暄
(南京师范数学系,210024)

摘 要 本文给出 Menger 空间上多值压缩型映象的一个新的不动点定理,它是 Hadžic 不动点定理[4]在某种意义下的改进.利用它,我们得到了度量空间上多值映象的一个不动点定理,统一并推广了文[6—10]的某些重要结果.

关键词 Menger 概率度量空间,多值映象,不动点.

下文中,$R=(-\infty,+\infty)$,Z^+ 为全体自然数的集合.$\mathscr{D}$ 为 R 上所有左连续的分布函数的集合.(E,F,Δ)为具有(ε,λ)-拓扑结构[3]的 Menger 概率度量空间[1,2],简记为 Menger 空间,$C(E)$表示 E 的所有非空闭子集的族.

定义 1 在(E,F,Δ)中,对给定的 $A,B\in C(E)$,$x\in E$,定义

$$F_{x,A}(t)=\sup_{y\in A}F_{x,y}(t),\quad \forall\, t\in R,$$

称 $F_{x,A}(\cdot)$为点 x 到 A 的概率距离.定义 $F^{(r)}_{A,B}(t)=\inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(t)$,$\forall\, t\in R$.显然,$A$ 与 B 之间由 F 诱出的 Menger-Hausdorff 距离[6]可表为:$F_{A,B}(t)=\sup_{s<t}\Delta(F^{(r)}_{A,B}(s),F^{(r)}_{B,A}(s))$.

引理 1 设(E,F,Δ)为 Menger 空间,Δ 是左连续的 t-范数,$A,B\in C(E)$,$x,y\in E$,则

(i) 对任何 $x\in A$,有 $F^{(r)}_{A,B}(t)\leqslant F_{x,B}(t)$;

(ii) $F_{x,A}(t)=1$,$\forall\, t>0$ 当且仅当 $x\in A$;

(iii) $F_{x,A}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,A}(t_2))$,$\forall\, t_1,t_2>0$;

(iv) $F_{x,A}(t)$是关于 t 的左连续函数.

证明是直接的,省略.

定义 2 设(X,d)是度量空间,$C_d(X)$表示 X 的所有非空闭子集族,$A,B\in C_d(X)$,定义

$$D_r(A,B)=\sup_{x\in A}d(x,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y).$$

于是,A 与 B 之间的 Hausdorff 距离可表为:$D(A,B)=\max\{D_r(A,B),D_r(B,A)\}$.

定义 3 设 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是严格增函数,$\varphi(0)=0$,$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=+\infty$,定义函数 $\varphi^*:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$如下:

$$\varphi^*(0)=0;\ \varphi^*(t)=\inf\{s>0\,|\,\varphi(s)>t\},\ t>0.$$

称 φ^* 为 φ 的伪逆.

不难证明,φ^* 是不减的连续函数(见[1]).

* 1991年10月31日收到.江苏省教委自然科学基金资助课题.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定义 4 称函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足条件(Φ)，如果 φ 严格增，在 $(0,+\infty)$ 内左连续，$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=+\infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<+\infty\ (t>0)$，其中 $\varphi^n(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的第 n 次迭代.

引理 2 如果 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足条件(Φ)，则

(i) $\varphi(t)<t\ (\forall\ t>0),\varphi(0)=0$;

(ii) $\varphi(\varphi^*(t))\leqslant t,\ \varphi^*(\varphi(t))=t\ (\forall\ t\geqslant 0)$;

(iii) $\varphi^*(t)>t\ (\forall\ t>0)$;

(iv) $\lim_{n\to\infty}\varphi^{*^n}(t)=+\infty\ (\forall\ t>0)$.

证明 (i) 由 $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0\ (\forall\ t>0)$ 及 φ 的严格递增性，用反证法易证.

(ii) $t=0$ 时，结论显然成立；若存在 $t_0>0$ 使 $\varphi(\varphi^*(t_0))>t_0$，则由 φ 的左连续性知，存在 $\varepsilon_0\in(0,\varphi^*(t_0))$ 使 $\varphi(\varphi^*(t_0)-\varepsilon_0)>t_0$. 于是由 φ^* 的定义得 $\varphi^*(t_0)\leqslant\varphi^*(t_0)-\varepsilon_0$，矛盾！故有 $\varphi(\varphi^*(t))\leqslant t(\forall\ t>0)$. 注意到 $\varphi(t)>0(\forall\ t>0)$，即得

$$\varphi^*(\varphi(t))=\inf\{r>0|\varphi(r)>\varphi(t)\}=\inf\{r>0|r>t\}=t.$$

(iii) 据(i)，(ii)及 φ^* 的不减性易证.

(iv) 由(iii)及 φ^* 的不减性得 $0<t<\varphi^*(t)\leqslant\cdots\leqslant\varphi^{*^n}(t)\leqslant\cdots$，假设 $0<\varphi^{*^n}(t)\leqslant a<+\infty$ $(n=1,2,\cdots)$，则由(ii)及 φ 的递增性得 $0<t\leqslant\varphi^n(a)$. 令 $n\to\infty$，得 $0<t\leqslant 0$，矛盾！故 $\lim_{n\to\infty}\varphi^{*^n}(t)=+\infty(\forall\ t>0)$.

定义 5 t-范数 Δ 称为 h-型的，如果函数族 $\{\Delta^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $t=1$ 处等度连续，这里

$$\Delta^1(t)=\Delta(t,t),\ \Delta^m(t)=\Delta(t,\Delta^{m-1}(t)),\ t\in[0,1],\ m=1,2,\cdots$$

引理 3 设 (E,F,Δ) 是 Menger 空间，Δ 是 h-型 t-范数，如果点列 $\{x_n\}\subset E$ 满足：对任何 $n\in Z^+$ 及 $t>0$ 有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_0,x_1}(\varphi^{*^n}(t)),\tag{1}$$

其中函数 φ 满足条件(Φ)，φ^* 是 φ 的伪逆，则 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{T}$-Cauchy 列，这里 $\mathscr{T}$ 是 (E,F,Δ) 的 (ε,λ)-拓扑.

证明 因 Δ 是 h-型的，所以对任何 $\lambda\in(0,1)$，存在 $\delta(\lambda)\in(0,1)$，使得当 $t>\delta(\lambda)$ 时，$\Delta^m(t)>1-\lambda$ 对一切 $m\in Z^+$ 成立. 因 $\sup_{t>0}F_{x_0,x_1}(t)=1$，所以存在 $t_0>0$. 使得 $F_{x_0,x_1}(t_0)>\delta(\lambda)$，从而 $\Delta^m(F_{x_0,x_1}(t_0))>1-\lambda,\forall\ m\in Z^+$. 又因 $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t_0)<+\infty$ (条件(Φ))，所以对任何 $t>0$，存在 $N\in Z^+$，使得当 $n>N$ 时有 $\sum_{i=n}^{\infty}\varphi^i(t_0)<t$. 于是由(1)式及引理 2 得

$$\begin{aligned}F_{x_n,x_{n+m}}(t)&\geqslant F_{x_n,x_{n+m}}\Big(\sum_{i=n}^{n+m}\varphi^i(t_0)\Big)\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(t_0)),\Delta(F_{x_{n+1},x_{n+2}}(\varphi^{n+1}(t_0)),\cdots,\\&\quad\Delta(F_{x_{n+m-2},x_{n+m-1}}(\varphi^{n+m-2}(t_0)),F_{x_{n+m-1},x_{n+m}}(\varphi^{n+m-1}(t_0)))\cdots)\\&\geqslant\Delta^m(F_{x_0,x_1}(t_0))>1-\lambda,\forall\ m\in Z^+,n>N.\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{T}$-Cauchy 列.

定理 1 设 (E,F,Δ) 是 $\mathscr{T}$-完备的 Menger 空间，Δ 是左连续的 h-型 t-范数. 又设映象列 $T_i:E\to C(E)(i=1,2,\cdots)$ 满足对任何 $i,j\in Z^+,x,y\in E$ 及 $u\in T_ix$，存在 $v\in T_jy$，使得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$F_{u,v}(\varphi(t)) \geqslant \min\{F_{x,y}(t), F_{x,T_ix}(t), F_{y,T_jy}(t)\}, \ \forall\ t > 0, \tag{2}$$

其中 φ 满足条件(Φ),则 $\{T_i\}$ 在 E 中有公共不动点,即存在 $x_* \in E$ 使得 $x_* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i x_*$.

证明 任取 $x_0 \in E, x_1 \in T_1 x_0$,由引理 2 及定理条件知,存在 $x_2 \in T_2 x_1$,使得对任何 $t>0$ 有

$$F_{x_1,x_2}(t) \geqslant F_{x_1,x_2}(\varphi(\varphi^*(t))) \geqslant \min\{F_{x_0,x_1}(\varphi^*(t)), F_{x_0,T_1x_0}(\varphi^*(t)), F_{x_1,T_2x_1}(\varphi^*(t))\}$$
$$\geqslant \min\{F_{x_0,x_1}(\varphi^*(t)), F_{x_1,x_2}(\varphi^*(t))\},$$

反复利用上式,得 $F_{x_1,x_2}(t) \geqslant \min\{F_{x_0,x_1}(\varphi^*(t)), F_{x_1,x_2}(\varphi^{*^n}(t))\}$, $\forall\ t>0$. 令 $n\to\infty$,注意到 $\varphi^{*^n}(t) \to +\infty\ (\forall\ t>0)$,即得 $F_{x_1,x_2}(t) \geqslant F_{x_0,x_1}(\varphi^*(t))$, $\forall\ t>0$. 继续这一程序,可定义序列 $\{x_n\} \subset E$,满足 $x_{n+1} \in T_{n+1}x_n$ 及 $F_{x_n,x_{n+1}}(t) \geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi^*(t))$, $\forall\ t>0, n=1,2,\cdots$. 于是,对任何 $n\in Z^+$ 及 $t>0$ 有 $F_{x_n,x_{n+1}}(t) \geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi^*(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_0,x_1}(\varphi^{*^n}(t))$. 据引理 3 知,$\{x_n\}$ 是 (E,F,Δ) 中的 $\mathscr{T}$-Cauchy 列. 因 (E,F,Δ) 是 $\mathscr{T}$-完备的,所以 $x_n \to x_* \in E$.

下面证明 $x_* \in T_i x_*\ (\forall\ i \in Z^+)$. 由(2)式及 $F^{(r)}_{T_ix,T_jy}(t)$ 的定义,我们有 $F^{(r)}_{T_ix,T_jy}(\varphi(t)) \geqslant \min\{F_{x,y}(t), F_{x,T_ix}(t), F_{y,T_jy}(t)\}$,从而对任何 $t>0$ 及 $0<\varepsilon<t$,有

$$F_{x_{n+1},T_ix_*}(t-\varepsilon) \geqslant F_{x_{n+1},T_ix_*}(\varphi(\varphi^*(t-\varepsilon))) \geqslant F^{(r)}_{T_{n+1}x_n,T_ix_*}(\varphi(\varphi^*(t-\varepsilon)))$$
$$\geqslant \min\{F_{x_n,x_*}(\varphi^*(t-\varepsilon)), F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^*(t-\varepsilon)), F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))\}$$
$$\geqslant \min\{F_{x_n,x_*}(\varphi^*(t-\varepsilon)), F_{x_0,x_1}(\varphi^{*^{n+1}}(t-\varepsilon)), F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))\}. \tag{3}$$

若 $F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))<1$,注意到 $x_n\to x_*$ 及 $\varphi^{*^n}(t)\to+\infty\ (\forall\ t>0)$,则由(3)知存在 $n_0\in Z^+$,当 $n>n_0$ 时有 $F_{x_{n+1},T_ix_*}(t-\varepsilon) \geqslant F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))$,于是由引理 1 得

$$F_{x_*,T_ix_*}(t) \geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\varepsilon), F_{x_{n+1},T_ix_*}(t-\varepsilon)) \geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\varepsilon), F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))),\ (n>n_0).$$

令 $n\to\infty$,得 $F_{x_*,T_ix_*}(t) \geqslant F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))$,再令 $\varepsilon\to0$,注意到 φ^* 的连续性,我们有 $F_{x_*,T_ix_*}(t) \geqslant F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^{*^n}(t)) \to 1\ (n\to\infty)$.

若 $F_{x_*,T_ix_*}(\varphi^*(t-\varepsilon))=1$,则由(3)式得 $F_{x_{n+1},T_ix_*}(t-\varepsilon)\to1\ (n\to\infty)$,从而 $F_{x_*,T_ix_*}(t) \geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\varepsilon), F_{x_{n+1},T_ix_*}(t-\varepsilon)) \to 1\ (n\to\infty)$.

因此,$F_{x_*,T_ix_*}(t)=1\ (\forall\ t>0), i=1,2,\cdots$. 据引理 1 即得 $x_*\in T_ix_*\ (i=1,2,\cdots)$. 定理得证.

在定理 1 中令 $\varphi(t)=kt\ (0<k<1)$,即得

定理 2 设 (E,F,Δ) 是 $\mathscr{T}$-完备的 Menger 空间,Δ 是左连续的 h-型 t-范数. 又设映象列 $T_i: E\to C(E)\ (i=1,2,\cdots)$ 满足:对任何 $i,j\in Z^+, x,y\in E$ 及 $u\in T_ix$,存在 $v\in T_jy$ 使得

$$F_{u,v}(kt) \geqslant \min\{F_{x,y}(t), F_{x,T_ix}(t), F_{y,T_jy}(t)\}, \quad \forall\ t>0, \tag{4}$$

其中 $0<k<1$ 是常数,则 $\{T_i\}$ 在 E 中有公共不动点 x_*,即 $x_*\in\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*$.

注 Hadžic 定理[4]中的连续 t-范数 Δ 若是 h-型的,则该定理便是定理 2 的特例. 因此,定理 1(定理 2)是 Hadžic 定理在某种意义下的改进和推广. 我们的证明没有利用非紧性概率函数,比 Hadžic 定理的证明要简单得多.

利用定理 2 可得到度量空间上多值映象的一个不动点定理.

定理 3 设 (E,d) 是完备的度量空间,映象列 $T_i: E\to C_b(E)\ (i=1,2,\cdots)$ 满足:存在 $\alpha\in(0,1)$,使得对任何 $i,j\in Z^+$ 及 $x,y\in E$ 有

$$D_r(T_ix, T_jy) \leqslant \alpha\min\{d(x,y), d(x,T_ix), d(y,T_jy)\}, \tag{5}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则$\{T_i\}$在E中有公共不动点x_*，即$x_*\in\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*$.

证明 定义映象$F:E\times E\to\mathscr{D}$如下：(记$F(x,y)=F_{x,y}$)

$$F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y))=\begin{cases}0, & t\leqslant d(x,y)\\ 1, & t>d(x,y)\end{cases}$$

由文[10]定理3知，$(E,F,\min)$是$\mathscr{T}$-完备的Menger空间，且易证$C(E)=C_d(E)$和$F_{x,A}(t)=H(t-d(x,A))$.

对任何$i,j\in Z^+$及$x,y\in E$，$u\in T_ix$，由$D_r(T_ix,T_jy)$的定义知，存在$v\in T_jy$使$d(u,v)\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}D_r(T_ix,T_jy)$. 令$k=\sqrt{a}$，由上式及(5)式可得

$$d(u,v)\leqslant k\max\{d(x,y),d(x,T_ix),d(y,T_jy)\}. \tag{6}$$

由(6)式可推得(4)式. 事实上，不妨设$t>\max\{d(x,y),d(x,T_ix),d(y,T_jy)\}$(否则，易知(4)式右端等于0，(4)式显然成立). 则由(6)式得$d(u,v)<kt$，故$F_{u,v}(kt)=1$，(4)式显然成立. 因此，由定理2知$\{T_i\}$在E中存在公共不动点x_*.

注 由于$D_r(A,B)\leqslant D(A,B)$，所以定理3是[6]中定理4.1的改进和推广.

推论 设(E,d)是完备的度量空间，映象列$T_i:E\to C_d(E)$ $(i=1,2,\cdots)$满足：存在常数$\alpha,\beta\in(0,1)$，$\alpha+2\beta<1$，使得对任何$i,j\in Z^+$及$x,y\in E$有

$$D_r(T_ix,T_jy)\leqslant\alpha d(x,y)+\beta[d(x,T_ix)+d(y,T_jy)], \tag{7}$$

则$\{T_i\}$在E中存在公共不动点x_*.

证明 令$k=\alpha+2\beta$，由(7)式不难推得$D_r(T_ix,T_jy)\leqslant k\max\{d(x,y),d(x,T_ix),d(y,T_jy)\}$. 因此，由定理3即得要证的结论.

注 特别地，在推论中令$T_i=T(\forall\, i\in Z^+)$. 这便是引文[7]的主要结果. 从而[7—9]的主要结果都是定理3的特例.

参 考 文 献

[1] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, 1983.

[2] 张石生，不动点理论及应用，重庆出版社，1984.

[3] B. Schweizer, A. Sklar, and E. Thorp, Pacific J. Math., 10(1960), 673—675.

[4] O. Hadžic, *Fuzzy Sets and Systems*, 29(1989), 115—125.

[5] O. Hadžic, Mat. Vesnik 3(16)(31) (1979), 125—133.

[6] Zhang Shisheng, Acta Math. Sinica, New Series, 1(4) (1985), 366—377.

[7] 王体翔，南京大学学报(数学半年刊)，1(1989)，16—23.

[8] S. B. Nadler, Pacific J. Math., 30(1969), 475—487.

[9] G. L. Nova, Pacific J. Math., 123(1985), 189—196.

[10] V. M. Sehgal and A. T. Bharucha-Reid, Math. Systems Theory, 6(1972), 97—102.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.