第14卷第4期 1994年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 14 No. 4 Nov. 1994

关于自同构作用下的不变元*

潘庆年

(阜阳师范学院数学系，安徽236032)

摘　要　文章主要讨论了代数(环)、(双)Hopf代数中自同构作用下不变元素的性质，得到一些新的结果：设A是有限维半单代数，则Aut A作用下的不变元属于中心，并且举出反例说明这个性质不能一般化到有限维代数、有限维半单(双)Hopf代数.

关键词　自同构，不变元，Hopf代数，group-like元素.

§1　导　引

通过研究一个代数系统中一类特殊元素的性质，来刻画系统本身，是一种常见的代数研究方法. 如在(环)代数中对幂等元、幂零元等特殊元的讨论. 群的自同构作用下的不变元一定属于中心，在§2中，我们指出这个性质对一般的代数并不成立，但对于有限维半单代数是对的. Hopf代数是当今一个十分活跃的代数分枝，在§3中，我们指出上述性质并不能一般化到(双)Hopf代数，即使是有限维半单的.

§2　代数情况

设A是域F上的代数，Aut A表示A上所有代数自同构构成的群，$C(A)$表示A的中心.

定理1　设F是代数闭域，A是有限维半单的. 如果$a\in A$在Aut A作用下不变，则$a\in C(A)$.

证明　设A半单的，于是A可以分解为$A\cong M_{n_1}(F)\oplus M_{n_2}(F)\oplus\cdots\oplus M_{n_t}(F)$. 式中$M_{n_i}(F)$是$F$上$n_i$阶全矩阵代数(见[4]). 这样，$\forall\ a\in A$，$a$可以唯一分解

$$a=\sum_{i=1}^{t}m_i,m_i\in M_{n_i}(F),i=1,2,\cdots,t;\ a\in C(A)\Leftrightarrow m_i\in C(M_{n_i}(F)),i=1,2,\cdots,t.$$

如果$a\in A$在Aut A作用下不变，那么取特殊形式的自同构：$f=\bigoplus_i f_i$，$f_i\in$ Aut $M_{n_i}(F)$，$i=1,2,\cdots,t$. a在f作用下不变，注意：$f(a)=a\Leftrightarrow f_i(m_i)=m_i$，$i=1,2,\cdots,t$. 因此，只要在等一个直和项上讨论清楚即可. 不妨取$M_{n_1}(F)$为例.

对于$M_{n_1}(F)$上中任何可逆矩阵P，作映射：$f_p:m\to pmp^{-1}$，$m\in M_{n_1}(F)$，$f_p\in\mathrm{Aut}(M_k(F))$，且$f_p(m)=m\Leftrightarrow pm=mp$.

设m为满足上述条件的元素，取p为两类特殊形式的初等矩阵$I(i(c))$及$I(i,j)$：

* 1991年9月24日收到. 94年4月收到修改稿. 安徽省教委自然科学基金资助项目.

$$I_i(c)=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& c && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1\end{pmatrix}_i \quad (c\neq 0,1); \quad I(i,j)=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 0 & \cdots & 1 & \\ &&& \ddots && \\ && 1 && 0 & \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}_{i \atop j}.$$

由 $pm=mp$ 及 F 的无零因子法，可以推出 $m=\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=kI$ 为一数量矩阵，它必属于 $M_{n_1}(F)$的中心. □

对于非半单代数，既使是有限维的，上述结论也不成立. 请参考下面反例：

例 1 $F=Z_2=Z/(2)$，$A=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in Z_2\right\}=Z_2e_{11}\oplus Z_2e_{22}\oplus Z_2e_{12}$.

式中，$e_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$e_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$为幂等元，而 $e_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$为幂零元. 很容易证明 $N=Z_2e_{12}$ 为 A 的 Jacobison 根，事实上：$N^2=0$ 为幂零理想，且 $A/N\cong Ze_{11}\oplus Ze_{22}$ 为半单代数[5]，对于任何 $f\in \mathrm{Aut}\ A$，对 Jacobison 根的性质 $f(N)\subseteq N$. 所以 $f(e_{12})\in N$，$e_{12}\neq 0$，f 是同构，故 $f(e_{12})\neq 0$，注意到 N 实际上只含 0 及 e_{12}，只有 $f(e_{12})=e_{12}$. e_{12} 是 Aut A 作用下的不变元，容易验证 $e_{12}\overline{\in} C(A)$.

值得一提的是，定理 1 中条件"Aut A 作用下的不变元"可以削弱为"Int A(A 的内自构群)作用下的不变元". 这可由证明过程看出.

§3 双代数、Hopf 代数的情况

本节讨论固定在一个基域 F 上，自由使用[3]中有关记号与结论.

设 H 是 F 上(双)Hopf 代数，仍以 Aut H 表示 H 上所有自同构构成的群，$C(H)$表示 H 的中心. 我们将证明，定理 1 不能一般化到 H 中，构造反例如下：

设 X 为有限群，$T=\mathrm{Aut}\ X$，做以 $T\times X$ 为自由基的 F-线性空间 H：$H=F(T\times X)$. 再赋于 H 代数结构、余代数结构：

乘法： $(g,x)(h,y)=\begin{cases}(gh,y), & x^h=y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ (1)

单位元： $\sum\limits_{x\in X}(1,x)$. (2)

余乘法： $\Delta(g,x)=\sum\limits_{\substack{yz=x\\ y,z\in X}}(g,y)\otimes(g,z)$. (3)

余单位： $\varepsilon(g,x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ (4)

式中，(g,x)，$(h,y)\in T\times X$，然后再对基上的运算进行线性扩张.

定理 2 (1) 按上述方法定义的 H 是双代数. (2) H 还是一个 Hopf 代数.

证明 (1) 由(1)－(4)式，可以直接验证乘法满足结合律、余乘法满足余结合律$(I\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes I)\Delta$；$\sum\limits_{x\in X}(1,x)$ 是单位元、ε 是余单位元$(I\otimes\varepsilon)\Delta=(\varepsilon\otimes I)\Delta$. 限于篇幅，从略.

(2) 由(1)，只须证明 H 上存在 antipode 映射 s 既可. 构造 s 如下：

$$s:\ H \to H;\quad s:\ (g,x) \to (g^{-1},(x^{-1})^{g^{-1}}),\ \forall\ (g,x) \in H.$$

设 $\Delta(g,x) = \sum_{v\in X}(g,xv^{-1}) \otimes (g,v) = \sum_{u\in X}(g,u) \otimes (g,u^{-1}x)$ 容易验证

$$\sum_{v\in X}(g,xv^{-1})s(g,v) = \sum_{u\in X}s(g,u)(g,u^{-1}x) = \varepsilon(g,x)\,|_H,$$

所以 H 是一个 Hopf 代数(见[3]).

对于 H，我们有类似子群代数的 Maschke 定理的结论.

定理 3 (1) 如果 char $F\nmid|T|$，则 H 作为代数是半单的.

(2) 如果 char $F\nmid|X|$，则 H 作为余代数是半单的.

证明 (1) 可以证明 $\int = \sum_{g\in T}(g,1)$ 是 H 的积分，且 $\varepsilon(\int) = \sum_{g\in T}\varepsilon(g,1) = |T| \neq 0$. 根据文献[3]中 5.1.8 可知 H 是半单代数.

(2) 设 $C=H^c$(H 的余代数)，则 C 为余半单余代数 $\Leftrightarrow C^*$ 为半单代数. 可以证明 $C^*\cong\bigoplus_{|T|}FX$，$|X|\neq0$，由 Maschke 定理，$FX$ 是半单的，而 C^* 作为有限个半单代数的直和也是半单的. 因此，只要证明 $C^*\cong\bigoplus_{|T|}FX$ 即可.

设 $\varepsilon_{g,x}$ 为对偶基，即：$\langle\varepsilon_{g,x},(h,y)\rangle=\delta_{g,h}\delta_{x,y}$，$\forall\ (h,y)\in C$. 通过验证，可知：

$$\varepsilon_{g,x}\cdot\varepsilon_{h,y} = \begin{cases}\varepsilon_{g,xy}, & h=g,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{5}$$

因此 $\{\varepsilon_{g,1}\,|\,g\in T\}$ 为正交幂等元集，且属于中心和满足关系 $\sum_{g\in T}\varepsilon_{g,1} = \varepsilon = 1_{C^*}$，故

$$C^* \cong \bigoplus_{g\in T}\varepsilon_{g,1}(C^*).$$

进一步，对每一个 $g\in T$，作映射 φ_g：$FX\to\varepsilon_{g,1}(C^*)$ φ_g：$x\to\varepsilon_{g,x}$，$\forall\ x\in X$. 由(5)式，可以验证 φ_g 是一个代数同构，这样 $C^*\cong\bigoplus_{g\in T}\varepsilon_{g,1}(C^*)\cong\bigoplus_{g\in T}FX$. □

上述 H 的构造比较巧妙，作者主要从[1]、[2]中的方法得以启示. 下面将主要证明这个 H 不满足类似于定理 2 的结论. 分两步：

(一) 构造 Aut H 作用下的不变元.

令 $G=G(H)=\{a\in H\,|\,a$ 为 group-like 元素$\}$，即：$a\in G\Leftrightarrow a\neq0$，且 $\Delta(a)=a\otimes a$. 则 G 是 H 的线性无关子集. 由于 H 是有限维的，故 G 是有限集(见[3]). 作 $\bar{a}$ 如下：$\bar{a} = \sum_{a\in G}a$. 这个 $\bar{a}$ 就是 Aut H 作用下的不变元素. 事实上，$\forall\ f\in$ Aut H，由 f 的余代数同构性知 $f|_G$ 是 G 上的一个一一变换，因而 $f(\bar{a}) = \sum_{a\in G}f(a) = \sum_{\beta\in G}\beta = \bar{a}$.

(二) 在一些特定的条件下，$\bar{a}\in C(H)$. 为此，需要几个引理，限于篇幅，我们将略去这些引理的证明.

引理 1 $\forall\ a = \sum_{g\in T,x\in X}C_{g,x} \in H$，那么 $a\in G\Leftrightarrow$ 存在 $g_0\in T$，使 $a = \sum_{x\in X}C_{g_0,x}(g_0,x)$，$C_{g_0,x}\neq0$ 且满足 $C_{g_0,x}\cdot C_{g_0,y}=C_{g_0,xy}$.

引理 2 对 $\forall\ g\in T$，定义 f_g：$X\to F^*=F/\{0\}$ 如下：$f_g(x)=C_{g,x}$，$\forall\ x\in X$. 式中，$C_{g,x}$ 如引理 1 中所述，那么，f_g 是一个群同态.

引理 3 如 X 为非交换的单群，那么 X 至 F^* 的任何群同态必满足 $f(x)=1$，$\forall\ x\in X$.

由上述三个引理，当 X 为非交换单群的情况下，任一 $a\in G$ 可以简化 $a=\sum_{x\in X}(g,x)$. 因而，$\bar{a}$ 可以简化为 $\bar{a}=\sum_{g\in T,x\in X}(g,x)$. 下面将指出，这个 $\bar{a}$ 就是我们所要求的.

X 为非交换单群，存在 $y_0\bar{\in}C(X)$，那么 y_0 在 $T=\mathrm{Aut}\,X$ 作用不是不变元（任一群的全体自同构作用下的不变元一定属于中心），也就是说存在 $g_0\in T$，使 $y_0^{g_0}\neq y_0$.

取 $(h_0,y_0)\in H$，$y_0\bar{\in}C(X)$，那么

$$(h_0,y_0)\bar{a}=\sum_{\substack{g\in T\\ x\in X}}(h_0,y_0)(g,x)=\sum_{g\in T}(h_0g,y_0^{g_0}),\tag{6}$$

$$\bar{a}(h_0,y_0)=\sum_{\substack{g\in T\\ x\in X}}(g,x)(h_0,y_0)=\sum_{g\in T}(gh_0,y_0).\tag{7}$$

(6)式中有一项 $(h_0g_0,y_0^{g_0})$ 和(7)式一切项互异，这样的自由 F-基的组合是不可能相等的，因而 $(h_0,y_0)\bar{a}\neq\bar{a}(h_0,y_0)$. 进而 $\bar{a}\bar{\in}C(H)$.

值得一提的是，虽然 $\bar{a}\bar{\in}C(H)$，但 $\bar{a}\in C_0(H)$（H 的余中心）. 式中，$C_0(H)$ 如下：

$$C_0(H)=\{a\mid a\in H\text{ 且 }\Delta(a)=\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}=\sum_{(a)}a_{(2)}\otimes a_{(1)}\}.$$

H 的 $\mathrm{Aut}\,H$ 作用下不变的元素是否必然属于 $C_0(H)$，或者，能否构造这样的 a：它在 $\mathrm{Aut}\,H$ 作用下不变，但 $a\bar{\in}C(H)\cup C_0(H)$，都是值得进一步研究的问题.

致谢： 导师许永华先生的指导以及朱胜林博士的宝贵建议！

参 考 文 献

[1] M. Cohen and D. Fishman, *Hopf algebra actions*, J. Algebra 100(1986), 363—379.

[2] R. J. Blatter, M. Cohen and S. Montgomery, *Crossed products band inner actions of Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 298(1986).

[3] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, W. A. Benjamin, 1969.

[4] L. H. Rowen, *Ring theory* I, Academic Press, New York, 1988.

[5] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1973.

On Invariant Elements under Automorphic Actions

Pan Qingnian

(Fuyang Normal College, Fuyang)

Abstract

The aim of the paper is to study the property of invariant elements (or fixed elements) under·antomorphic actions in algebras and Hopf algebras. It is shown that if A is a finite dimensional semisimple algebra over a field K, then the element fixed by all automorphsims of A is in the center of A. An example is given to show that this conclusion cannot be generalized to Hopf algebras. Some counter-examples of other systems are constructed.

Keywords automorphism, invariant elements, Hopf algebras, group-like elements.