第14卷第4期
1994年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 4
Nov. 1994

二阶非线性差分方程的Riccati变换*

杨宇军　　　　张卫国
(郑州大学数学系，郑州 450052)　(长沙铁道学院，长沙 410075)

摘　要　本文使用Riccati变换研究了一类二阶非线性差分方程的振荡性.

关键词　Riccati变换，振荡，差分方程.

1 引　言

本文讨论了一类非线性差分方程

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1})+q_nf(x_n)=r_n\quad n\geqslant -1 \tag{1.1}$$

的振荡性，其中 c_{n-1},q_n,r_n 是实序列，且 $c_{n-1}>0$，$f(x)$ 是一个实函数，$\Delta x_{n-1}=x_n-x_{n-1}$ 是向前差分算子. 当 $f(x)=x,r_n=0$ 时，(1.1)的振荡性已由Erbe，Hooker等人在文[1－5]中讨论过.

(1.1)的一个实解 $x=\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ 被称为非振荡的，如果存在一个 $N>0$，使得对所有 $n\geqslant N$ 都有 $x_nx_{n-1}>0$；反之，x 被称为振荡的. 如果(1.1)存在一个非振荡解，则称(1.1)是非振荡的；反之，称(1.1)是振荡的.

我们首先在第二节研究了当 $r_n=0$ 时(1.1)的振荡性，利用其结果来研究(1.1)的振荡性. 主要方法是使用广义的Riccati变换.

对于 $f(x)$，作如下假设：

(A)　设 $f(x)\in C((-\infty,+\infty),(-\infty,+\infty))$，对 $x\neq 0$，$xf(x)>0$，且 $f'(x)$ 存在，$f'(x)\in C((-\infty,+\infty),(0,+\infty))$，$f'(x)\geqslant L>0$. 进而，对于任意正数 $\delta>0$，

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}<+\infty \text{ 或 } \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{dx}{f(x)}>-\infty.$$

当 $f(x)=|x|^\alpha\operatorname{sgn}x\,(\alpha>1)$，方程(1.1)的振荡性是令人很感兴趣的.

本文将用到算子 Δ 的下列性质：

(i)　$\displaystyle\sum_{i=N}^{n}\Delta u_i=u_{n+1}-u_N$；

(ii)　$\Delta(u_nv_n)=u_n\Delta v_n+v_{n+1}\Delta u_n=u_{n+1}\Delta v_n+v_n\Delta u_n$；

(iii)　$\displaystyle\sum_{i=N}^{n}u_i\Delta v_{i-1}=v_nu_{n+1}-u_Nv_{N-1}-\sum_{i=N}^{n}v_i\Delta u_i$.

2　齐次方程的振荡性

* 1991年6月29日收到.

首先讨论下面齐次差分方程

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) + q_n f(x_n) = 0, \tag{2.1}$$

使用广义的 Riccati 变换，将(2.1)化为另一种差分方程来进行研究.

定理 2.1 设(A)成立，且$\{c_n\}$是单调的. 如果存在一个单调递增的正数列$\{h_n\}$，使得下面条件成立：

(i) 若 c_n 单调递增，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}c_k h_k<+\infty$. 或若 c_n 单调递减，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}h_k<+\infty$；

(ii) $$\lim_{n\to+\infty}\inf\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}h_k q_k>-\infty; \tag{2.2}$$

(iii) $$\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}h_k q_k=+\infty, \tag{2.3}$$

则(2.1)是振荡的.

证明 假设(2.1)有一个非振荡解 $x=\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$，即存在一个正整数 $N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，$x_n x_{n-1}>0$. 不失一般性，设对 $n\geqslant N$，有 $x_n>0$. 若不然，当 $x_n<0$ 时，作 $y_n=-x_n$，则(2.1)化为

$$\Delta(c_{n-1}\Delta y_{n-1}) + q_n\hat{f}(y_n) = 0, \tag{2.1$'$}$$

其中 $\hat{f}(y)=-f(-y)$，由于 $\hat{f}(y)$ 也满足(A)，所以对(2.1)′的讨论化为对(2.1)的讨论.

作代换 $z_{n-1}=h_{n-1}c_{n-1}\Delta x_{n-1}/f(x_{n-1})$，用 f_n 表示 $f(x_n)$，则 z_{n-1} 满足

$$\Delta z_{n-1} - h_{n-1}^{-1}f_n^{-1}f_{n-1}z_{n-1}\Delta h_{n-1} + f_n^{-1}z_{n-1}\Delta f_{n-1} + h_n q_n = 0. \tag{2.4}$$

由假设(A)，存在 $\xi_{n-1}\in(x_{n-1},x_n)$使得 $\Delta f_{n-1}=f'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$. 用 f'_n 表示 $f'(\xi_n)$，由于

$$1 + h_{n-1}^{-1}c_{n-1}^{-1}f_{n-1}z_{n-1} = 1 + f_{n-1}^{-1}f_{n-1}\Delta x_{n-1} = 1 + f_{n-1}^{-1}\Delta f_{n-1} = f_{n-1}^{-1}f_n > 0.$$

设 $g(x_n)=\dfrac{1}{f(x_n)}$，$s_{n-1}=(h_{n-1}c_{n-1}f_{n-1}^{-1}+z_{n-1})^{-1}$，则

$$\Delta z_{n-1} - c_{n-1}(\Delta h_{n-1})g(x_n)\Delta x_{n-1} + s_{n-1}z_{n-1}^2 + h_n q_n = 0, \tag{2.5}$$

进而

$$z_n - z_{N-1} + \sum_{i=N}^{n}s_{i-1}z_{i-1}^2 + \sum_{i=N}^{n}h_i q_i = \sum_{i=N}^{n}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}. \tag{2.6}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(-z_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{k}\sum_{i=N}^{n}s_{i-1}z_{i-1}^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}h_i q_i + \frac{n-N}{n}(-z_{N-1}).\end{aligned} \tag{2.7}$$

先估计(2.7)的左端第二项. 记

$$g^+(x_i) = \begin{cases} g(x_i) & \Delta x_{i-1}>0 \\ 0 & \Delta x_{i-1}<0 \end{cases};\qquad g^-(x_i) = \begin{cases} 0 & \Delta x_{i-1}>0 \\ g(x_i) & \Delta x_{i-1}<0 \end{cases}.$$

由(A)及积分中值定理得，存在 $\bar{x}_n\in(x_{n-1},x_n)$使得

$$g^+(\bar{x}_n)\Delta x_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_n}g^+(x)dx < \int_{\delta}^{+\infty}\frac{dx}{f(x)} < +\infty,$$

且 $g(x)$是单调减少的，即 $g^+(x_n)\leqslant g^+(\bar{x}_n)\leqslant g^+(x_{n-1})$. 因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g^{+}(x_i)\Delta x_{i-1}$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g^{+}(\bar{x}_i)\Delta x_{i-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g^{+}(x)dx$$
$$\leqslant M\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1}). \tag{2.8}$$

由(i),若$\{c_n\}$单调递增,(2.8)为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}\leqslant M\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})$$
$$\leqslant M\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}c_k\sum_{i=N}^{k}(\Delta h_{i-1})\leqslant M\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}c_kh_k<+\infty. \tag{2.9}$$

若$\{c_n\}$是单调递减的,(2.8)为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}\leqslant Mc_{N-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}h_k<+\infty. \tag{2.9$'$}$$

总之

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}<+\infty. \tag{2.10}$$

若 $\sum_{n=N}^{+\infty}s_{n-1}z_{n-1}^2=+\infty$,由(2.2),(2.7)和(2.10)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(-z_k)=+\infty. \tag{2.11}$$

由于 $s_{n-1}^{-1}=(h_{n-1}c_{n-1}f_{n-1}^{-1}+z_{n-1})$,则 $h_{n-1}c_{n-1}f_{n-1}^{-1}=s_{n-1}^{-1}-z_{n-1}$. 所以

$$\frac{1}{L}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}c_kh_k\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(s_k^{-1}-z_k)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(-z_k). \tag{2.12}$$

与(i)矛盾. 因此

$$\sum_{n=N}^{+\infty}s_{n-1}z_{n-1}^2<+\infty. \tag{2.13}$$

令 $T_n=\sum_{k=N}^{n}|z_k|$,由 Schwartz 不等式得

$$(\sum_{k=N}^{n}z_k)^2\leqslant T_n^2\leqslant(\sum_{k=N}^{n}s_k^{-1})(\sum_{k=N}^{n}s_kz_k^2)\leqslant M_1(\sum_{k=N}^{n}h_kc_kf_k^{-1}+T_n)\leqslant 2M_2(T_n+\sum_{k=N}^{n}h_kc_k).$$

或 $(T_n-M_2)^2\leqslant 2M_2(\sum_{k=N}^{n}h_kc_k)+M_2^2$,或

$$T_n\leqslant(2M_2\sum_{k=N}^{n}h_kc_k+M_2^2)^{\frac{1}{2}}+M_2. \tag{2.14}$$

由(i)和(2.14)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}T_n=0 \text{ 且 } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(-z_k)=0. \tag{2.15}$$

由(2.7),(2.10),(2.13)和(2.15)得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}h_iq_i\leqslant\frac{(n-N)}{n}(-z_{N-1})+\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(-z_k)+\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}$$

$$\leqslant M_3 < +\infty.$$

这个不等式与(2.3)矛盾. □

定理2.2 设(A)成立,且$\{c_n\}$是有界序列.如果存在一个递增有界正序列$\{h_n\}$使得

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\inf\sum_{i=0}^{n}h_iq_i > -\infty; \tag{2.16}$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty}\sup\Big(\sum_{k=0}^{n}h_k^{-1}\Big)^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{n}h_k^{-1}\sum_{i=0}^{k}h_iq_i\Big) = +\infty, \tag{2.17}$$

则(2.1)是振荡的.

证明 若$x=\{x_n\}$是(2.1)的一个非振荡解,同定理(2.1)的证明,z_{n-1}满足(2.6),且由$\{c_n\}$和$\{h_n\}$的限制条件得

$$\sum_{k=N}^{n}c_{k-1}(\Delta h_{k-1})g(x_k)\Delta x_{k-1} < +\infty. \tag{2.18}$$

同样,若$\sum_{k=N}^{+\infty}s_{k-1}z_{k-1}^2 = +\infty$,可推得$\lim_{n\to+\infty}z_n = -\infty$.又$h_n^{-1}c_n^{-1}f_n \geqslant L_1 > 0$,且$1+h_n^{-1}c_n^{-1}f_nz_n > 0$,矛盾.因此$\sum_{k=N}^{+\infty}s_{k-1}z_{k-1}^2 < +\infty$,进而$\lim_{n\to+\infty}s_nz_n^2 = 0$,即对于任意$\varepsilon > 0$,当$n$充分大时,$s_nz_n^2 < \varepsilon$,进而

$$|z_n|^2 = (h_nc_nf_n^{-1} + z_n)s_nz_n^2 < \varepsilon(L_1^{-1} + |z_n|).$$

或$(|z_n| - \frac{\varepsilon}{2})^2 < L_1^{-1}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$,即

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n| = 0. \tag{2.19}$$

由(2.16),(2.18)和(2.19)得

$$\sum_{k=N}^{n}h_k^{-1}\sum_{i=N}^{k}h_iq_i \leqslant M\Big(\sum_{k=N}^{n}h_k^{-1}\Big) + \sum_{k=N}^{n}h_k(-z_k) \leqslant (M+1)\Big(\sum_{k=N}^{n}h_k^{-1}\Big)$$

这与(2.17)矛盾.

定理2.3 设(A)成立,且$\{c_n\}$为单调数列.如果存在一个递增正数列$\{h_n\}$,使得定理2.1的(i)和(ii)成立,且对于任意实数$\alpha > 0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(k+1-i)^{\alpha}h_iq_i = +\infty. \tag{2.20}$$

则(2.1)是振荡的.

证明 相似于定理2.1的证明,设当$n\geqslant N$时,$x_{n-1} > 0$,则$z_{n-1} = h_{n-1}c_{n-1}(\Delta x_{n-1})/f_{n-1}$满足(2.5),因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}h_iq_i &= -\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}\Delta z_{i-1}\\ &+\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}s_{i-1}z_{i-1}^2\\ &\leqslant -\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}\Delta z_{i-1} + \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{\alpha}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

由定理2.1的(i)和(ii)及其证明知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1} \leqslant M < +\infty.$$

因此

$$\frac{1}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{a}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g(x_i)\Delta x_{i-1}\leqslant\frac{(n+1-N)^{a}}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}c_{i-1}(\Delta h_{i-1})g^{+}(x_i)\Delta x_{i-1}$$
$$\leqslant M<+\infty. \tag{2.22}$$

又从定理 2.1 的证明中知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=N}^{n}|z_k|=0$. 用 Δ_i 表示对 i 的差分算子，即对固定的 n, $\Delta_i(n-i)^{a}=(n-i-1)^{a}-(n-i)^{a}$. 由微分中值定理得，存在 $\eta_i\in(i,i+1)$ 使得 $\Delta_i(n-i)^{a}=-a(n-\eta_i)^{a-1}$. 因此

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-i)^{a}\Delta z_{i-1}\\
&=-\frac{1}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}(k+1-i)^{a}z_{N-1}+\frac{1}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}z_i\Delta_i(k+1-i)^{a}\\
&\leqslant\frac{(n+1-N)^{a}(n-N)}{n^{a+1}}|z_{N-1}|+\frac{a}{n^{a+1}}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}(k+1-\eta_i)^{a-1}|z_i|\\
&\leqslant M_1+\frac{a(n+1-N)^{a-1}}{n^{a-1}}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n}\sum_{i=N}^{k}|z_i|\\
&\leqslant M_1+\frac{a}{n}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=N}^{k}|z_i|<+\infty.
\end{aligned}\tag{2.23}$$

由(2.21)，(2.22)和(2.23)得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n^{a+1}}\sum\limits_{k=N}^{n}\sum\limits_{i=N}^{k}(k+1-i)^{a}h_iq_i>+\infty$. 与(2.20)矛盾.

3 非齐次方程的振荡

当 $f(x)=x$, $c_{n-1}=1$ 时，(1.1)化为

$$\Delta^2x_{n-1}+q_nx_n=r_{n+2}, \tag{3.1}$$

其中 $\Delta^2=\Delta\Delta$. 本节将考察非齐次方程(3.1)的振荡性.

定义序列 $\{\rho_n\}_{n=2}^{+\infty}$, $\rho_n=\sum\limits_{k=0}^{n-2}\sum\limits_{i=0}^{k}r_{i+2}$.

定理 3.1 假设 $q_n>0$，且(i) 由上述定义的序列$\{\rho_n\}$是振荡的，即不存在正整数 $N\geqslant2$，使当 $n>N$ 时，$\rho_n\rho_{n+1}>0$. 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=0$. (ii) 二阶线性齐次方程

$$\Delta^2z_{n-1}+\frac{1}{2}q_nz_n=0,\ n\geqslant2 \tag{3.2}$$

是振荡的. 则差分方程(3.1)也是振荡的.

证明 假设(3.1)有一个非振荡解 $x=\{x_n\}$. 不失一般性，设存在 $N\geqslant2$，使当 $n\geqslant N$ 时，$x_n>0$. 设 $y_{n-1}=x_{n-1}-\rho_n$，由于 $\Delta^2\rho_n=r_{n+2}$，由(3.1)得

$$\Delta^2y_{n-1}+q_nx_n=0,\ n\geqslant N. \tag{3.3}$$

因此 $\Delta^2y_{n-1}<0$，即当 n 充分大时，序列$\{\Delta y_n\}$和$\{y_n\}$都是单调的，且保持同一符号. 若 $y_{n-1}<0$，即 $x_{n-1}<\rho_n$. 由于$\{\rho_n\}$是振荡的，与 $x_n>0$ 矛盾. 因此 $y_{n-1}>0$.

又$\{\Delta y_n\}$是单调减的. 若对于充分大的 n, $\Delta y_n<0$，由 $\Delta^2y_{n-1}<0$ 可得 $\Delta y_n-\Delta y_{N_1-1}<0$. 取 N_1 充

分大，使 $\Delta y_{N_1-1}<0$，则 $\Delta y_n<\Delta y_{N_1-1}$. 进而 $y_n-y_{N_1-1}<(n-N_1)\Delta y_{N_1-1}$. 令 $n\to+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=-\infty$ 与 $y_n>0$ 矛盾. 必有 $\Delta y_n>0$. 即序列 $\{y_n\}$ 是递增的. 由于 $x_{n-1}=y_{n-1}+\rho_n$. 显然，当 $\rho_n\geqslant 0$ 时，$x_{n-1}\geqslant y_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}y_{n-1}$. 当 $\rho_n<0$ 时，由于 $\{y_n\}$ 是递增的正序列，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=0$，所以当 n 充分大时，$|\rho_n|<\frac{1}{2}y_{n-1}$，或 $\rho_n>-\frac{1}{2}y_{n-1}$，因此 $x_{n-1}=y_{n-1}+\rho_n>\frac{1}{2}y_{n-1}$. 由(3.3)得 $\Delta^2 y_{n-1}+\frac{1}{2}q_n y_{n-1}\leqslant 0$. 由二阶差分方程的必较定理(见[6,p18 或 1,p470])可知差分方程(3.2)一定有一个非振荡解；与(ii)矛盾.

事实上，只要 $f(x)$ 是递增函数，从上面的证明可以看出，定理 3.1 的结论对方程(1.1)也成立.

参 考 文 献

[1] S. Chen and L. H. Erbe, *Riccati techniques and discrete oscillations*, J. Math. Anal. Appl. 142(1989), 468—487.

[2] J. W. Hooker, M. K. Kwong and W. T. Patula, *Oscillatory second order linear difference equations and Riccati equations*, SIAM J. Math. Anal. 18(1987), 54—63.

[3] J. W. Hooker and W. T. Patula, *Riccati type transformations for second order linear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 82(1981), 451—462.

[4] W. T. Patula, *Growth and oscillation properties of second order linear difference equations*, SIAM J. Math. Anal. 19(1979), 55—61.

[5] T. Fort, *Finite Difference and Difference Equations in the Real Domain*, Oxford Univ. Press, London, 1948.

[6] A. B. Mingarelli, *Volterra-Stieltjes Integral Equations and Generalized Ordinary Differential Expressions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 989, Spring-Verlag, New York, 1983.

The Riccati Transformation for Second Order Nonlinear Difference Equation

Yang Yujun *Zhang Weiguo*

(Zhengzhou University) (Changsha Railway Institute)

Abstract

In this paper, the oscillations are discussed for second order difference equations

$$\Delta(C_{n-1}\Delta x_{n-1})+q_n f(x_n)=r_n$$

by means of Riccati transformation.