第14卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

非线性方程组的具有单边初值条件的分裂型单调迭代法*

彭　宏　　　徐宗本　　游兆永
(杭州大学数学系，310028)　(西安交通大学，710049)

摘　要　本文利用区间迭代法的思想，提出了一种使用单边初值条件的分裂型单调迭代方法，证明了该方法的收敛性，并且具体化到常见的单调迭代法.

关键词　单调迭代法、区间迭代法、分裂型.

一　引　言

从1939年Kantorovich[1]首次用偏序的概念研究单调迭代方法到现在，单调迭代方法的理论和应用都获得了许多令人满意的结果[2]，但是常见的单调迭代方法都要对非线性映象的整体性质提出假设，这种对非线性映象整体性态的统一假设，对可用单调迭代方法求解非线性方程类提出了苛刻限制，必然对该方法的理论和实际应用产生严重阻碍，针对上述问题，并从简化计算的复杂度和应用的广泛性出发，利用非线性映象对变量的各部分分量的不同性态，我们提出了求解非线性方程组的分裂型单调迭代法[3]，该方法包括了一些常见的单调迭代方法，完全解除了对非线性映象的统一假设，远比通常单调迭代方法要广泛得多，而且适用范围也宽广得多.

用单调迭代方法求解非线性方程组，初值的选取是关键问题之一. 虽然，在[4]中已讨论了初值的选取问题，但仅对非常特殊的情况，进行了讨论，没有解决实质问题. 我们在研究分裂型单调迭代方法时，也遇到了选初值难的问题. 因此，我们借助于区间迭代法的思想，提出了一种使用单边初值条件的分裂型单调迭代方法，并且具体化到常见的单调迭代方法.

二　基本概念及性质

设 D 是欧氏空间 R^n 中具有非空内部的某个子集，考察非线性方程组

$$Fx=0,\quad x\in D\subset R^n \tag{$*$}$$

的可解性与求解方法，其中 $F:D\subset R^n\to R^n$ 是一给定的非线性映象，对于给定的非线性映象 $f:R^1\to R^1$，我们区分它在点 $x_0\in R^1$ 的下述性态：

(Ⅰ)　f 在 x_0 处单调增，即存在 x_0 的邻域 $\Delta_1(x_0)$ 使 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$，对任何 $x_1,x_2\in\Delta_1(x_0)$，x_2

* 1991年9月19日收到.

$\geqslant x_1$;

（Ⅱ） f 在 x_0 处单调减，即存在 x_0 的邻域 $\Delta_2(x_0)$ 使 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$，对任何 $x_1,x_2\in\Delta_2(x_0)$，$x_2\geqslant x_1$；

（Ⅲ） f 在 x_0 处下有界，即存在 x_0 的邻域 $\Delta_3(x_0)$，指标集 Λ 和集值映象 $G=\{g_l;\tilde{D}\times\tilde{D}\to\tilde{D},l\in\Lambda\}$，使得 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant -g(x_1,x_2)(x_2-x_1)$，$\forall\ x_1,x_2\in\Delta_3(x_0)$，$x_2\geqslant x_1$，$g(x_1,x_2)\in G(x_1,x_2)$.

定义 2.1 设 e^j 是 R^n 中的标准坐标向量，$h_{ij}:R^1\to R^1$，记

$$h_{ij}(t)=\begin{cases}f_i(x_0+te^j), & \text{如果 } x_0+te^j\in D;\\ f_i(x_0), & \text{如果 } x_0+te^j\notin D.\end{cases}$$

并且令

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } h_{ij} \text{ 在 } x_0 \text{ 处有性态（Ⅰ）},\\ 0 & \text{当 } h_{ij} \text{ 在 } x_0 \text{ 处有性态（Ⅲ）},\\ -1 & \text{当 } h_{ij} \text{ 在 } x_0 \text{ 处有性态（Ⅱ）}.\end{cases}$$

则称 $s(F)(x)=(s_{ij})_{n\times n}$ 为非线性映象 F 在 x_0 处的符号矩阵.

给定非线性映象 F 的符号矩阵 $s(F)(x)=(s_{ij})_{n\times m}$. 令

$$A_i=\{j\in\{1,2,\cdots,n\};s_{ij}=0\},\quad a_i=|A_i|,$$
$$B_i=\{j\in\{1,2,\cdots,n\};s_{ij}=1\},\quad b_i=|B_i|,$$
$$C_i=\{j\in\{1,2,\cdots,n\};s_{ij}=-1\},\quad c_i=|C_i|.$$

其中 $|D|$ 表示集合 D 的基数，又对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，分裂 x 成为：$x=([x]_{a_i},[x]_{b_i},[x]_{c_i})$，$i=1,2,\cdots,n$. 其中 $[x]_{a_i}=(x_j;j\in A_i)$，$[x]_{b_i}=(x_j;j\in B_i)$，$[x]_{c_i}=(x_j;j\in C_i)$. 因此，方程组（＊）可以分裂成

$$F([x]_a,[x]_b,[x]_c)=0. \tag{2.1}$$

考察非线性方程组

$$\begin{cases}F([x]_a,[x]_b,[y]_c)=0,\\ F([y]_a,[y]_b,[x]_c)=0.\end{cases} \tag{2.2}$$

定义 2.2 如果存在置换矩阵 P，使

$$PS(F)(D)P^T=\begin{pmatrix}E^0_{S\times S} & -E_{S\times(L-S)}\\ -E_{(L-S)\times S} & E^0_{(L-S)\times(L-S)}\end{pmatrix},$$

其中对某个正数 $1\leqslant S\leqslant L$，$E^0_{m\times n}$ 表示其元素取值为 0 或 1 的 $m\times n$ 阵，$E_{m\times n}$ 表示其元素为 1 的 $m\times n$ 阵，则称 F 的分裂是正则的.

引理 1 如果 F 的符号矩阵所诱导的分裂(2.1)是正则的，则

(1) 方程组（＊）有解存在的充要条件是(2.2)有解存在；

(2) 方程组（＊）解唯一的充要条件是(2.2)解唯一.

(本引理证明简单，略).

三 主要结果

首先考察一般化迭代过程：

$$\text{(I1)}\quad\begin{cases}F([x^n]_a,[x^n]_b,[y^n]_c+\underline{d}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})(x^{n+1}-x^n)=0,\\ F([x^{n+1}]_a,[x^{n+1}]_b,[y^n]_c+\bar{d}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})(\bar{y}^{n+1}-x^{n+1})=0,\\ y^{n+1}=\inf\{\bar{y}^{n+1},y^n\}.\end{cases}$$

选择参数序列$\{\underline{u}^{(n)}\}$,$\{\underline{v}^{(n)}\}$,$\{\bar{u}^{(n)}\}$和$\{\bar{v}^{(n)}\}$如下：

$\underline{u}^{(n)}\in[x^n,y^{-1}]\times[x^{-1},x^n]^2$,$\underline{v}^{(n)}\in[y^n,y^{-1}]\times[x^{-1},x^n]\times[x^n,y^{-1}]$,

$\bar{u}^{(n)}\in[x^{-1},x^{n+1}]\times[x^{n+1},y^0]\times[y^n,y^{-1}]$,$\bar{v}^{(n)}\in[x^0,x^{n+1}]\times[y^n,y^{-1}]\times[x^{-1},x^{n-1}]$.

假设：

(S1) 存在$[x^0,y^0]\subset D$,$F:D\subset R^n\to R^n$有解Z^*,使$x^0\leqslant Z^*\leqslant y^0$,

$$F([x^0]_a,[x^0]_b,[y^0]_c)\leqslant 0,\tag{3.1}$$

(S2) 对任何$u,v\in D^3$,存在两个连续的选择$\underline{d}(u,v)=I+\underline{m}(u,v)$,$\underline{m}(u,v)\in M(u,v)$,$\bar{d}(u,v)=I+\bar{m}(u,v)$,$\bar{m}(u,v)\in M(u,v)$,满足$\underline{d}(u,v)$有连续,非负,非奇异的左下逆$\underline{B}(u,v)$;$\bar{d}(u,v)$有连续,非负逆;

(S3) 对任何$x,y\in[x^0,y^0]$,$x\leqslant y$,使

$$\bar{d}(x,y)(y-x)\leqslant F([y]_{ab},\cdot)-F([x]_{ab},\cdot)\leqslant\underline{d}(x,y)(y-x),\tag{3.2}$$

$$F(\cdot,\cdot,[y]_c)-F(\cdot,\cdot,[x]_c)\geqslant 0,\tag{3.3}$$

成立.

定理 3.1 设D是R^n中的非空子集,R^n的锥k是正则和极小的,并且(S1),(S2)和(S3)成立,则迭代过程(I1)是适定的,且由(I1)产生的序列$\{(x^n,y^n)\}$满足

(1) $\{[x^n,y^n]\}$是渐缩区间序列,且存在$[x^*,y^*]$使$[x^*,y^*]=\bigcap_{n=0}^{\infty}[x^n,y^n]$.

(2) 方程组(2.2)在$[x^0,y^0]^2$中有唯一的有序极小-极大解(x^*,y^*)存在.

证明 用归纳法证明迭代过程(I1)是适定的,且由(I1)所产生的序列$\{x^m\}$和$\{y^m\}$满足：

$$F([x^m]_a,[x^m]_b,[y^m]_c)\leqslant 0\tag{3.4}$$

$$x^0\leqslant x^1\leqslant\cdots\leqslant x^m\leqslant x^*\leqslant Z^*\leqslant y^*\leqslant y^m\leqslant\cdots\leqslant y^1\leqslant y^0.\tag{3.5}$$

从(3.1)知,结论对$m=0$是平凡的,设结论对$m\leqslant n(m>0)$成立,以下证(3.4)和(3.5)对$m=n+1$成立.

(a) 考察算子

$$\underline{\Omega}_n(z)=z-\underline{B}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})[\underline{d}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})z+F([x^n]_{ab},[y^n]_c)],$$

$$\underline{z}_n=x^n-\underline{B}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})F([x^n]_{ab},[y^n]_c).$$

类似[3]定理4的证明过程可得$\underline{\Omega}_n$在$[\underline{z}_n-x^n,Z^*-x^n]$中有极小不动点$\underline{w}_n$存在,令$x^{n+1}=x^n+\underline{w}_n$,显然有$x^n\leqslant z_n\leqslant x^{n+1}\leqslant Z^*$.且满足(I1)的第一个方程：

(b) $F([x^{n+1}]_{ab},[y^{n+1}]_c)-F([x^n]_{ab},[y^n]_c)=F([x^{n+1}]_{ab},[y^{n+1}]_c)-F([x^n]_{ab},[y^{n+1}]_c$
$+F([x^n]_{ab},[y^{n+1}]_c)-F[x^n]_{ab},[y^n]_c\leqslant\underline{d}(x^n,x^{n+1})(x^{n+1}-x^n)$,

$F([x^{n+1}]_{ab},[y^{n+1}]_c)\leqslant\underline{d}(x^n,x^{n+1})(x^{n+1}-x^n)+F([x^n]_{ab},[y^n]_c)$
$\leqslant\underline{d}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})(x^{n+1}-x^n)+F([x^n]_{ab},[y^n]_c)=0.$

从而有$F([x^{n+1}]_{ab},[y^{n+1}]_c)\leqslant 0$,因为

$$F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) - F([x^n]_{ab},[y^n]_c) \leqslant \underline{d}(x^n,x^{n+1})(x^{n+1}-x^n),$$

$$F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) \leqslant \underline{d}(x^n,x^{n+1})(x^{n+1}-x^n) + F([x^n]_{ab},[y^n]_c)$$

$$\leqslant \underline{d}(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})(x^{n+1}-x^n) + F([x^n]_{ab},[y^n]_c) = 0,$$

因此 $F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c)\leqslant 0$.

$$-\bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) = \bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})\bar{d}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})(\bar{y}^{n+1}-\bar{x}^{n+1}) = \bar{y}^{n+1}-\bar{x}^{n+1},$$

$$F([Z^*]_{ab},[Z^*]_c) - F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) = F([Z^*]_{ab},[Z^*]_c) - F([Z^*]_{ab},[y^n])$$

$$+ F([Z^*]_{ab},[y^n]_c) - F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) \geqslant F([Z^*]_{ab},[y^*]_c) - F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c)$$

$$\geqslant \bar{d}(x^{n+1},Z^*)(Z^*-x^{n+1}) \geqslant \bar{d}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})(Z^*-x^{n+1}),$$

$$-\bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) \geqslant \bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})\bar{d}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})(Z^*-x^{n+1}) = Z^*-x^{n+1},$$

从而有

$$x^{n+1}-Z^* \geqslant \bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c),$$

$$\bar{y}^{n+1}-Z^* = (\bar{y}^{n+1}-x^{n+1}) + (x^{n+1}-Z^*) \geqslant -\bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c)$$

$$+ \bar{B}(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})F([x^{n+1}]_{ab},[y^n]_c) = 0.$$

故 $\bar{y}^{n+1}\geqslant Z^*$，从归纳假设 $Z^*\leqslant y^n$ 推出 $Z^*\leqslant\inf\{\bar{y}^{n+1},y^n\}=y^{n+1}$，这说明(3.4)和(3.5)对于 $m=n+1$ 成立. 依归纳法，(3.4)和(3.5)对任何正整数 m 成立.

最后，由 R^n 的正则性，存在 $\bar{x}^*,\bar{y}^*\in[x^0,y^0]$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=\bar{x}^*$，$\lim\limits_{m\to\infty}y^m=\bar{y}^*$，从(3.5)推出 $[x^*,y^*]\subset[\bar{x}^*,\bar{y}^*]=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}[x^n,y^n]$，又从定理 2.3[3] 知 (x^*,y^*) 是(2.2)的有序极小-极大解，因此，$x^*=\bar{x}^*$，$y^*=\bar{y}^*$，故 $(\bar{x}^*,\bar{y}^*)=(x^*,y^*)$ 是方程(2.2)的有序极小-极大解. 证毕.

现在，我们把上述一般结果具体化到常见类的解非线性方程组的单调迭代方法.

(1) Newton 型方法

设 F 的均差为 $\delta F(x,y)(y-x)=Fy-Fx$，对可比较的 $x,y\in D$，且对任何 $u,v\in D^3$，δF 有非负逆存在，$B(u,v)=[\delta F(u,v)]^{-1}$，取 $\bar{d}(u,v)=(\underline{d}(u,v)=\delta F(u,v)$，Potra[5] 已讨论了在单边初值条件下的 Newton 型方法，该方法实质是我们的迭代过程(I1)把参数 $(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})$，$\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})$ 具体取为：$(\underline{u}^{(n)}=(x^n,0,0)$，$\underline{v}^{(n)}=(y^n,0,0)$，$\bar{u}^{(n)}=\bar{v}^{(n)}=(x^{n+1},0,0)$ 的情况，所以(I1)是[5]中相应方法的一般情形.

(2) 割线型方法

设 F 能分解作两个算子之差，即 $F=F^+-F^-$，且 F^+ 和 F^- 分别对于变量 $([x]_{ab},\cdot)$ 有广义均差 d^+ 和 d^-，令 $d(u,v)=d^+(u_1,v_1)-d^-(u_2,v_2)$，$\forall\ (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in D^2$.

设集值映象 $\bar{D}:[x^{-1},y^{-1}]^2\subset D^2\to 2^{L(R^n)}$，使 $\bar{D}(x,y)=\bar{D}^{(1)}(x,y)+\bar{D}^{(2)}(x,y)$. 其中

$$\bar{D}^{(1)}(x,y) = \{d^+(\bar{x},\bar{y});x\leqslant\bar{x},y\leqslant\bar{y}\},$$

$$\bar{D}^{(2)}(x,y) = \{-d^-(\underline{x},(\underline{y});\underline{x}\leqslant x,\underline{y}\leqslant y\}.$$

若存在满足定理 3.1 的两个连续的选择 $\underline{d}$ 和 $\bar{d}\in\bar{D}$，使

$$\bar{d}(u,v) = \bar{d}^{(1)}(u_1,v_1) + \bar{d}^{(2)}(u_2,v_2),\ (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in D^2,$$

$$\underline{d}(u,v) = \underline{d}^{(1)}(u_1,v_1) + \underline{d}^{(2)}(u_2,v_2),\ \bar{d}^{(i)},\underline{d}^{(i)}\in\bar{D}^{(i)}\ (i=1,2)$$

迭代过程(I1)中的参数 $(\underline{u}^{(n)},\underline{v}^{(n)})$ 和 $(\bar{u}^{(n)},\bar{v}^{(n)})$ 分别取作满足如下条件：

$$\underline{u}^{(n)} \in [x^n, y^{-1}] \times [x^{-1}, x^n], \underline{v}^{(n)} \in [y^n, y^{-1}] \times [x^{-1}, x^n],$$

$$\bar{u}^{(n)} \in [x^{-1}, x^{n+1}] \times [y^n, y^0], \ \bar{v}^{(n)} \in [x^0, x^{n+1}] \times [y^n, y^{-1}].$$

在以上假设下，(I1)就是具有单边初值的割线型单调迭代法.

(3) Alefeld 型方法

设 $\overline{D}$ 是 F 的广义均差，$D_2, \widetilde{D}_2$ 是它的二阶广义均差，并且存在连续，非负，双线性算子 $R, \widetilde{R}$ 使 $-\widetilde{R} \leqslant \widetilde{D}_2(x,y,z), D_2(x,y,z) \leqslant R, \forall\, x,y,z \in [x^{-1}, y^{-1}]$. 若对任何 $x, y \in [x^{-1}, y^{-1}]$，算子 $A_0(x, y) = \overline{D}(x,y) + R(x,y)$，$A_1(x,y) = \overline{D}(x,y) + \widetilde{R}(x,y)$，选择 $\underline{d}(u,v) = A_1(x^n, v_1)$，$\bar{d}(u,v) = A_0(u_2, y^n)$，迭代过程(I1)中的参数$(\underline{u}^{(n)}, \underline{v}^{(n)})$和$(\bar{u}^{(n)}, \bar{v}^{(n)})$可分别取作 $\underline{u}^{(n)} = (x^n, 0, 0)$，$\underline{v}^{(n)} = (y^{p_n}, 0, 0)$，$\bar{u}^{(n)} = (0, x^{n+1}, 0)$，$\bar{v}^{(n)} = (0, y^n, 0)$，$0 \leqslant p_n \leqslant n$，在以上假设下，迭代过程(I1)就是具有单边初值条件的 Alefeld 型方法.

参 考 文 献

[1] L. Kantorovich, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math., 71(1939), 63—97.

[2] F. A. Potra, *Monotone iterative methods for nonlinear operator equations*, Numer. Funct. Anal. & Optimiz., 9 (7&8)(1987), 809—843.

[3] 彭宏，非线性方程组的分裂型单调迭代方法及其应用，西安交通大学博士论文，(1991).

[4] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, New York, Academic Press, 1970.

[5] G. Alefeld and F. A. Potra, *On two higher order enclosing methods of J. W. Schmidt*. ZAMM, 68(1988), 331—337.

Splitting and Monotone Iterative Methods with Initial Value Condition of One Side for Nonlinear System of Equations

Peng Hong — (Dept. of Math., Hangzhou University)

Xu Zongben *You Zhaoyong* — (Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In this paper, we apply an idea of interval iteration methods, to get a splitting and monotone iterative methods with initial condition of one side. We prove its convergence and make a concrete analysis on some common monotone iterative methods.

Keywords monotone iteraive method, interval iteration method, splitting.