拟内射模中的消去定理*

乌 成 伟
(吉林工学院, 长春 130012)

摘 要 当左拟内射模 M 的自同态环 $\mathrm{End}_R M$ 为一 Dedekind 有限环时, M 的任何两个相互同构的子模的左相关补子模也同构.

关键词 左拟内射模, Dedkind 有限环, 左相关补子模.

设 M 为一左 R-模, R 为一有 1 的环. 若 M 的任一左子模 P 到 M 的同态均可延拓为 M 的一个自同态, 就说 M 为左拟内射模.

设 N_1、N_2 为 M 的左子模, 满足 $N_1\cap N_2=0$, 且对于任一左子模 $N\supset N_1$ 均有 $N\cap N_2\neq 0$, 便称 N_1 为(N_2 的)左相关补(子模).

引理 1 设 P 为左 R-模 M 的任一非本质左子模.

(i) P 的左相关补存在;

(ii) P 与其左相关补 N 之和 $P+N$ 为 M 的本质左子模;

(iii) 存在一包含 P 的左相关补 使 P 为其本质左子模.

关于左相关补, 由 Faith 与 Utumi 关于拟内射模的论述可知:

引理 2 左拟内射模的左相关补是它的直和因子, 因而仍为左拟内射模.

定理 3 指出的是, 在左拟内射模内, 左相关补拥有相当于内射模的位置:

定理 3 设 N、P、Q 为左拟内射模 M 的真子模, 下列陈述等价:

(i) N 为 M 的左相关补;

(ii) 若存在单同态 $h:P\to Q$, 则对任一同态 $\varphi\in\mathrm{Hom}_R(P,N)$ 均有同态 $g\in\mathrm{Hom}_R(Q,N)$ 使 $\varphi=gh$, 即右图交换

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q \arrow[dl, dotted, "g"] \\ N & \end{tikzcd}$$

(iii) 若存在单同态 $h:N\to Q$ 且 $h(N)\subset Q$, 则 $h(N)$ 为 Q 的直和因子;

(iv) 若单同态 $h:N\to Q$, 使 $h(N)$ 为 Q 的本质左子模, 则 $N\simeq Q$.

以上各条关于内射模均有相应的陈述, 可仿照内射模的证法在 M 内证之.

定理 4 设 P 为左拟内射模 M 的非本质左子模, 且为左相关补 N_1 的本质左子模, 则

(i) 若 Q 也为 M 的一左相关补或 $Q=M$, 则任一单同态 $h:P\to Q$ 均可延拓为 N_1 到 Q 的单同态;

(ii) 若 N_2 为 P 的左相关补, 则 $N_1\oplus N_2=M$.

证明 (i) 可仿内射模相应陈述证法.

* 1991年12月27日收到. 94年5月3日收到修改稿.

(ii) 由引理 1，$P\oplus N_2$ 为 M 的本质左子模，从而 N_1+N_2 为 M 的本质左子模. 又易证. $N_1\cap N_2=0$，故 $N_1+N_2=N_1\oplus N_2$ 为直和. 作映射 h 使 $h:N_1\oplus N_2\to N_1$，对任一 $x_1+x_2\in N_1\oplus N_2$，$x_1\in N_1$，$x_2\in N_2$，$h(x_1+x_2)=x_1$，则 h 为满同态，$N_2=\ker h$；那么对于 h 和内射 i：$N_1\oplus N_2\to M$，存在 $g\in \mathrm{Hom}_R(M,N_1)$ 使右图交换. 显然 $N_1\oplus\ker g=M$，$N_2\subseteq\ker g$，若 $N_2\neq\ker g$，则 N_2 为 $\ker g$ 的直和因子，即有左子模 $S\neq 0$ 使得 $N_2\oplus S=\ker g$，但 $N_1\oplus N_2$ 为本质的，故又 $(N_1\oplus N_2)\cap S\neq 0$，因而存在 $0\neq x_1+x_2=t\in(N_1\oplus N_2)\cap S$，$x_1\in N_1$，$x_2\in N_2$，从而 $0=g(t)=g(x_1)+g(x_2)=h(x_1)=x_1$，故得 $0\neq t=x_2\in(N_2\cap S)$，矛盾. 故 $N_2=\ker g$，$N_1\oplus N_2=M$. 证完.

$$\begin{tikzcd} N_1\oplus N_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dotted, "g"] \\ N_1 & \end{tikzcd}$$

设 S 为有 1 的环，若由$\forall\ x,y\in S$，当 $xy=1$ 时总可推出 $yx=1$，就称 S 为 Dedekind 有限的.

定理 5 设 N 为左拟内射模 M 的任一左相关补，下列陈述等价：

(i) $\mathrm{End}_R M$ 为 Dedekind 有限的；

(ii) M 不能与自己的真子模同构；

(iii) N 为能与自己的真子模同构；

(iv) 若 $i:N\to N$ 为单同态，则 i 为 N 的自同构.

证明 (i)⇒(ii) 若 M 与自己的真子模 K 之间存在同构 $\varphi:M\to K$，则 φ^{-1} 存在且可延拓为 M 到自身的同态 ψ，而 φ 又可看作是 M 的自同态，那么 $\psi\varphi=1\in\mathrm{End}_R M$，但 φ 不是满同态且 ψ 也不是单同态，故 $\varphi\psi\neq 1$，与(i)矛盾.

(ii)⇒(iii) 若 N 与其子模 K 之间存在同构 $\varphi:N\to K$，T 为 N 的左相关补，那么 $N\oplus T=M$，且 $K\oplus T$ 为 M 的真子模. 作映射 $\psi=\varphi+1_T$，使对任一 $x=x_1+x_2$，$x_1\in N$，$x_2\in T$，$\psi(x)=\varphi(x_1)+x_2$，则 ψ 为由 M 到 $K\oplus T$ 的同构，与(ii)矛盾.

(iii)⇒(iv) 若 i 不是同构，则 $i(N)$ 为 N 的真子模，即 N 与真子模 $i(N)$ 同构，与(iii)矛盾.

(iv)⇒(i) 若 φ 和 ψ 为 $\mathrm{End}_R M$ 中满足 $\varphi\psi=1$ 的任意两个元，则 $\psi:M\to M$ 为单同态，若 ψ 不为 M 的自同构，那么显然 $\psi(M)$ 为 M 的左相关补，$\psi^2(M)$ 为 $\psi(M)$ 的左相关补，即 $\psi|_{\psi(M)}$：$\psi(M)\to\psi(M)$ 为单同态但非自同构，与(iv)矛盾. 证完.

定理 6 设 Q_1 为左拟内射模 M 的任一左子模，$\mathrm{End}_R M$ 为 Dedekind 有限的，则 Q_1 到 M 的任一单同态均可延拓为 M 的自同构.

证明 设 $h:Q_1\to M$ 为任一单同态. 若 $h(Q_1)=Q_1$. 设 Q_1 为左相关补 $\overline{Q}_1$ 的本质左子模，则 h 可延拓为 $\overline{Q}_1$ 的自同构 h_1，再设 N 为 Q_1 在 M 内的左相关补，则 $N\oplus\overline{Q}_1=M$，从而 h_1 易延拓为 M 的自同构. 因此下设 $Q_2=h(Q_1)\neq Q_1$.

那么显然 $h:Q_1\to Q_2$ 为同构. 此同构的逆记为 h^{-1}. 先证明，总存在一真包含 Q_1 的左子模 Q，使 h 真延拓为 Q 到 M 的单同态 h_1.

$$\begin{tikzcd} Q_1\cap Q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h^{-1}"'] & Q_1 \arrow[dl, dotted, "g"] \\ Q_1 & \end{tikzcd}$$

若 Q_1 不是 M 的左相关补，由定理 4(i)，h 总存在真延拓 h_1. 故不妨设 Q_1 是左相关补，从而 Q_2 也是左相关补，由定理 5 可知 $Q_1\subset Q_2$ 与 $Q_1\supset Q_2$ 均不成立，所以 $Q_1\cap Q_2$ 为 Q_1 和 Q_2 的真子模.

(1) 若 $Q_1\cap Q_2$ 为 Q_1 的本质左子模，则存在右上的交换图，i 为内射，故$(\ker g)\cap(Q_1\cap Q_2)=0$ 从而 $\ker g=0$，即 g 为单同态，由定理 5(iv)知 g 为同构. 于是由 $g(Q_1\cap Q_2)=h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$，知 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 也为 Q_1 的本质左子模，进而知 $Q_1\cap Q_2$ 为 Q_2 的本质左子模. 由于 Q_1 为左相关补，故有左子模 T 使直和 $Q_1\oplus T=Q_1+Q_2$. 进而可推知 $T\cap Q_2=0$，因为若不然，$T\cap Q_2\neq 0$，则$(Q_1$

$\cap Q_2)\cap(T\cap Q_2)\neq 0$，从而 $T\cap Q_1\neq 0$，矛盾. 因此，h 可延拓为同构 $h_1:Q_1\oplus T\to Q_2\oplus T$，使对于任一 $x+t\in Q_1\oplus T$，$x\in Q_1$，$t\in T$，$h_1(x+t)=h(x)+t$，则 h_1 为 h 延拓得到的单同态.

(2)　以下设 $Q_1\cap Q_2$ 不是 Q_1 从而也不是 Q_2 的本质左子模，因而 $h(Q_1\cap Q_2)$ 和 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 也分别不是 Q_2 与 Q_1 的本质左子模. 由于 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 为 Q_1 的非本质左子模，所以存在 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补 $N\subseteq Q_1$，因而 $h(N)$ 为 $Q_1\cap Q_2$ 在 Q_2 内的左相关补. 若 $(Q_1\cap Q_2)\cap N$ 不是 N 的本质左子模，则 $h(N)\cap h(Q_1\cap Q_2)$ 不是 $h(N)$ 的本质左子模，从而在 $h(N)$ 内有一左子模 S 为 $h(N)\cap h(Q_1\cap Q_2)$ 在 $h(N)$ 内的左相关补；那么 h 可延拓为 $h_1:Q_1\oplus S\to Q_2\oplus h^{-1}(S)$，使对于任一 $x+t\in Q_1\oplus S$，$x\in Q_1$，$t\in S$，$h_1(x+t)=h(x)+h^{-1}(t)$；对任一 $x+t\in\ker h_1$，$x\in Q_1$，$t\in S$，有 $h(x)+h^{-1}(t)=0$，故 $h^{-1}(t)=-h(x)\in Q_1\cap Q_2$，从而 $t\in h(Q_1\cap Q_2)\cap S=0$，即 $h^{-1}(t)=0$，因而 $h(x)=0$，于是 $x=0$，$x+t=0$，故 $\ker h_1=0$，所以 h_1 可以看作到 M 内的单同态. 所以只要存在一 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 在 Q_1 内的左相关补 N 使 $Q_1\cap Q_2\cap N$ 不是 N 的本质左子模，h 便可延拓为单同态 h_1.

类似的，若 $h(Q_1\cap Q_2)$ 在 Q_2 内存在一左相关补 N 使 $Q_1\cap Q_2\cap N$ 不是 N 的本质左子模，则 N 内存在一 $Q_1\cap Q_2\cap N$ 的左相关补 S，使 h 可延拓为同构 $h_1:Q_1\oplus S\to Q_2\oplus h^{-1}(S)$，即为到 M 的单同态.

(3)　以下设 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 在 Q_1 中和 $h(Q_1\cap Q_2)$ 在 Q_2 中的任何左相关补 N，均使 $Q_1\cap Q_2\cap N$ 为 N 的本质左子模. 那么可以推得，$Q_1\cap Q_2$ 不论在 Q_1 中还是在 Q_2 中的左相关补 N，均使 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\cap N$ 或是 $h(Q_1\cap Q_2)\cap N$ 为 N 的本质左子模：若不然，不妨设 $Q_1\cap Q_2$ 在 Q_1 内有一左相关补 N 使 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\cap N$ 不是 N 的本质左子模，那么 $h(Q_1\cap Q_2)$ 在 Q_2 内有左相关补 $h(N)$ 使 $Q_1\cap Q_2\cap h(N)$ 不是 $h(N)$ 的本质左子模，矛盾.

设 $h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 为 Q_1 的左相关补 P_1 的本质左子模，$h(Q_1\cap Q_2)$ 为 Q_2 的左相关补 P_2 的本质左子模，那么单同态 $h^2|_{h^{-1}(Q_1\cap Q_2)}:h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\to h(Q_1\cap Q_2)$ 可延拓为 P_1 到 P_2 内的单同态 φ，则 $\varphi(P_1)$ 为包含 P_2 的本质左子模 $h(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补，故 $\varphi(P_1)=P_2$，即 $\varphi:P_1\to P_2$ 为同构. 设 N_i 为 $Q_1\cap Q_2$ 在 Q_i 内的左相关补，$i=1,2$，不妨认为 $P_1\supseteq N_1$，因为如果 $N_1\not\subseteq P_1$，由于 $N_1\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 为 N_1 的本质左子模，故 $1|_{h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\cap N_1}:N_1\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\to P_1$ 可延拓为 N_1 到 P_1 内的单同态，设为 $i:N_1\to P_1$，那么 $i(N_1)$ 也是 $Q_1\cap Q_2$ 在 Q_1 内的左相关补，故不妨认为 $N_1\subseteq P_1$. 同理也不妨认为 $N_2\subseteq P_2$. 在 P_1 内，假如 N_1 不是 $Q_1\cap Q_2\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补，则存在真包含 N_1 的 $Q_1\cap Q_2\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补 N'，那么在 Q_1 内有 $N'\cap(Q_1\cap Q_2)\neq 0$，从而 $N'\cap Q_1\cap Q_2$ 为 P_1 的一非 0 子模，故 $N'\cap Q_1\cap Q_2\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)\neq 0$，矛盾，故在 P_1 内 N_1 也为 $Q_1\cap Q_2\cap h^{-1}(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补. 因而 $\varphi(N_1)$ 为 P_2 内 $Q_1\cap Q_2\cap h(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补. 与 N_1 同理，N_2 也为 P_2 内 $Q_1\cap Q_2\cap h(Q_1\cap Q_2)$ 的左相关补. 那么在 P_2 内，设 $Q_1\cap Q_2\cap h(Q_1\cap Q_2)$ 为左相关补 S 的本质左子模，则 $S\oplus N_2=P_2=S\oplus\varphi(N_1)$，故有同构 $N_2\simeq P_2/S\simeq\varphi(N_1)\simeq N_1$，从而存在同构 $f:N_2\to N_1$. 于是可以作映射 $h_1:Q_1\oplus N_2\to Q_2\oplus N_1$，使对于任一 $x_1+x_2\in Q_1\oplus N_2$，$x_1\in Q_1$，$x_2\in N_2$，有 $h_1(x_1+x_2)=h(x_1)+f(x_2)$，那么 h_1 为同构，也是到 M 的单同态 h 的真延拓.

以上陈述证明了，只要 Q_1 为 M 的真子模，对 Q_1 到 M 的任何单同态 h，均存在单同态 h_1 和真包含 Q_1 的左子模 Q 使 $h_1:Q\to M$ 为 h 的真延拓.

在延拓过程中，当某一对 h_1 和 Q 使 $h_1(Q)=Q$ 时，由前述，易证 h_1 可延拓为 M 的自同构. 因此下面假定当 $h_1(Q)$ 或 Q 为 M 的真子模时，$h_1(Q)\neq Q$. 设 A 为 M 的满足下述条件的左子模之集：

(i) 若 $Q\in A$,则 $Q_1\subseteq Q$,且对于上述同态 $h:Q_1\to M$ 存在单同态:$h_1:Q\to M$ 为 h 的延拓;

(ii) 若 $Q,Q'\in A$,且 $Q\subseteq Q'$,则存在单同态 $h_1:Q\to M$ 使 $h_1|_{Q_1}=h$ 和单同态 $h_2:Q'\to M$ 使 $h_2|_{Q}=h_1$.

那么 $A\neq\varnothing$,对于其中任一升链,$S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots\subseteq S_n\subseteq\cdots$,均有一到 M 内的单同态序列 f_1,f_2,$\cdots$,f_n,$\cdots$与之对应,它们均满足 $f_1|_{Q_1}=h$ 且 $f_{i+1}|_{S_i}=f_i$,$i=1,2,\cdots$,记 $S=\bigcup S_i$,作映射 $f:S\to M$,使对于任一 $x\in S$,若 $x\in S_n$,则 $f(x)=f_n(x)$,那么 f 为 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$到 M 内的延拓,且为单同态,故有 $S\in A$. 从而由 Zorn 引理知 A 中有极大元;设为 K,若 $K\neq M$,按前叙必有真包含 K 的左子模 K' 使得 f 延拓为单同态 $f':K'\to M$,从而与 K 极大相矛盾,因此 $K=M$. 这就说明了 h 可延拓为 M 的自同构. 证完.

事实上,上述性质是下述拟内射模中的消去定理的等价条件的一部分.

定理 7 在左拟内射模 M 内,下列陈述等价:

(i) 若 N_1,N_2 分别为任何两个满足 $P_1\simeq P_2$ 的左子模的左相关补,则 $N_1\simeq N_2$;

(ii) 任一左子模 P_1 到 M 的任一单同态均可延拓为 M 的自同构;

(iii) $\mathrm{End}_R M$ 为 Dedekind 有限的.

证明 (ii)⇒(iii)用反证法,利用定理 5 结论可证. (iii)⇒(ii)即定理 6. 下证(i)⇔(ii).

(i)⇒(ii) 设 $h:P_1\to M$ 为单同态,令 $P_2=h(P_1)$,则 $P_2\simeq P_1$. 设 P_1 为左相关补 Q_1 的本质左子模,则 h 可延拓为 Q_1 到 M 的单同态 h_1,那么 $h_1(Q_1)$ 为 M 的左相关补,且显然 P_2 为 $h_1(Q_1)$ 的本质左子模. 设 P_1,P_2 的左相关补分别为 N_1,N_2,二者之间的同构为 φ,那么由定理 4(ii)有 $N_1\oplus Q_1=M=N_2\oplus h_1(Q_1)$,作映射 $\psi=\varphi+h_1$,使对于任一 $x_1+y_1\in M$,$x_1\in N_1$,$y_1\in Q_1$,有 $\psi(x_1+y_1)=\varphi(x_1)+h_1(y_1)$,那么显然 ψ 为同构,故 h 满足(ii).

(ii)⇒(i) 设 $h:P_1\to P_2$ 为同构,那么 h 可看作 P_1 到 M 内的单同态,故可延拓为 M 的自同构 h_1,从而 $h_1(N_1)$ 为 P_2 的左相关补. 设 P_2 为左相关补 Q 的本质左子模,则 $Q\oplus h_1(N_1)=Q\oplus N_2$,故 $h_1(N_1)\simeq M/Q\simeq N_2$,从而 $N_1\simeq N_2$. 证完.

参 考 文 献

[1] C. Faith, *Algbra* Ⅰ, *Rings, Modules and Categories*, Springer-Verlag Berlin Heidlberg New York, 1981.

[2] C. Faith, *Algbra* Ⅱ, *Ring Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidlberg New York, 1976.

Cancellation Theorem in a Quesinjective Module

Wu Chengwei

(Jilin Institute of Technology, Changchun)

Abstract

In this paper, the following result is obtained: In a left quasinjective module M, the left relative complement submodules of any two submodules which are isomorphic are all isomorphic, if and only if End $R_p M$ is Dedeking finite.