第 14 卷第 4 期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

关于多复变数积分表示的注释*

林　良　裕
(厦门大学数学系，361005)

摘　要　近年来许多文章应用所谓的 A 类函数来建立 C^n 空间中有界域上的积分表示. 本文证明了 $C^n(n\geqslant 2)$ 中任意一有界域上根本不存在这种 A 类函数，并指出目前多复变数积分表示中存在的一些模糊概念和本质的错误.

关键词　多复变数，积分表示，支撑函数.

在多复变数积分表示的研究中，目前一些文章存在着某些模糊的概念和本质的错误[1]—[12]. 本文就此作一些必要的注释，提供与同行商榷.

§1　定理和积分表示的注释

设 D 是多复变数空间 $C^n(n\geqslant 2)$ 中具有光滑或逐块光滑可定向边界 ∂D 的有界域，$\overline{D}$ 表示 D 的闭包，$A^n(\overline{D})$ 和 $A(\overline{D})$ 分别表示在 $\overline{D}$ 上定义的 C^n 到 C^n 和 C^n 到 C^1 的全纯映射构成的空间. $z=(z_1,\cdots,z_n)$，ζ,z 表示 C^n 中的点，$dz=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$. 文[1]—[11]给出下面所谓 A 类函数的定义：

定义[1]—[11]　若函数 $F_j(\zeta,z)$ 是在有界闭区域 $\overline{D}$ 上定义的全纯函数，且能表成

$$F_j(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\varphi_{ji}(\zeta,z),\quad j=1,\cdots,k.$$

当 $\zeta\neq z$ 时，$F_j(\zeta,z)\neq 0$，其中 $\zeta\in\partial D,z\in D$；$\varphi_{ji}$ 是 $\overline{D}$ 上的全纯函数，这时称函数 $F_j(\zeta,z)$ 为 A 类函数，记 $F_j\in A$.

注意，上述 A 类函数 $F_j(\zeta,z)$ 定义的含义实际上是满足下面三个条件的函数：

(i)　$F_j(\zeta,z)$ 是在 $C^n\times C^n$ 中的有界闭区域 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上定义的分别关于 ζ 和 z 全纯的函数.

(ii)　$F_j(\zeta,z)$ 能表成

$$F_j(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\varphi_{ji}(\zeta,z),\quad j=1,\cdots,k,$$

其中 $\varphi_{ji}(\zeta,z)$ 是 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上分别关于 ζ 和 z 全纯的函数.

(iii)　$F_j(\zeta,z)\neq 0$，当 $\zeta\in\partial D,z\in D$ 时.

由此可知，定义 1 的实质是：假定在 $C^n\times C^n$ 中有界域的闭包 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上存在分别关于 $\zeta\in\overline{D}_\zeta$ 和 $z\in\overline{D}_z$ 全纯的多复数函数 $F_j(\zeta,z)$. 当固定 $z\in D_z$ 时使得 $F_j(\zeta,z)$ 视为 ζ 的全纯函数，它在

* 1992 年 2 月 9 日收到. 国家自然科学基金，福建省部分自然科学基金资助项目.

D_ζ 内含有零点，$\zeta=z$，且其零点集合又不穿越边界 ∂D_ζ.

应当指出，当 $n=1$ 时，这种 A 类函数的确普遍存在. 例如 $f=\zeta-z$，但当 $n\geqslant 2$ 时，非也. 因为这时零点绝非孤立. 下面我们来阐明这个问题.

引理[13],[14] 设映射 $f\in A^n(\overline{D})$，D 为 C^n 中的具有逐块光滑可定向边界 ∂D 的有界域，且边界 ∂D 不包含此映射的零点. 那么映射 f 在 D 内只有孤立零点，并且零点的数目 N(零点个数按重数计)用公式

$$N=N(f,D)=\int_{\partial D}\omega[f(z),\overline{f(z)}] \tag{1}$$

表示，其中

$$\omega(f,\bar f)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{|f|^{2n}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\bar f_j d\bar f_{[j]}\wedge df,$$

$$d\bar f_{[j]}=d\bar f_1\wedge\cdots\wedge d\bar f_{j-1}\wedge d\bar f_{j+1}\wedge\cdots\wedge d\bar f_n.$$

(参见文献[13]p100－106 页，定理 2.6.1 及其证明). 由此，我们有下面的推论，下文的 n 皆指 $n\geqslant 2$.

推论 1 在引理条件下，若映射 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 在 ∂D 上有二个分量函数 $f_i=f_j$，$i\neq j$. 则映射 f 在区域 D 内没有零点.

证明 因为在 ∂D 上，$f_i=f_j$，$i\neq j$，因此在 ∂D 上有

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\equiv 0.$$

由于[13] $df=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$，于是应用引理，从(1)式立得 $N=N(f,D)=0$，即 f 在 D 内无零点.

推论 2 设 n 个复变数全纯函数 $f_1\in A(\overline{D})$，且 $f_1|_{\partial D}\neq 0$，则函数 $f_1(z)$ 在区域 D 内无零点.

证明 设 $f_1\in A(\overline{D})$，且 $f_1|_{\partial D}\neq 0$，我们取 $\overline{D}$ 到 C^n 的对角线全纯映射

$$f:\overline{D}\to C^n,\ f=(f_1,f_1,\cdots,f_1).$$

显然，f 满足引理的全部条件，因此映射 f 在 D 内至多只有孤立零点，但由推论 1 立知 f 在 D 内的零点个数 $N=N(f,D)\equiv 0$，即 $f_1|_D\neq 0$，又由于 $f=(f_1,\cdots,f_1)\neq(0,\cdots,0)$ 当且仅当 $f_1\neq 0$，因此，$f_1|_D\neq 0$.

定理 1 设 D 是 $C^n(n\geqslant 0)$ 中具有光滑或逐块光滑可定向边界 ∂D 的有界域，那么不存在定义在 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上满足下面条件的所谓 A 类函数 $F_j(\zeta,z)$，$1\leqslant j\leqslant k$.

(i) $F_j(\zeta,z)$ 是 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上定义的分别关于 ζ 和 z 全纯的函数.

(ii) F_j 能表成

$$F_j(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\varphi_{ji}(\zeta,z),\ j=1,2,\cdots,k.$$

其中 $\varphi_{ji}(\zeta,z)$ 是 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上分别关于 ζ 和 z 全纯的函数.

(iii) $F_j(\zeta,z)\neq 0$，当 $\zeta\in\partial D$，$z\in D$ 时.

证明 假定在 $\overline{D}_\zeta\times\overline{D}_z$ 上存在 $k(k\geqslant 1)$ 个如定义 1 所述的，即满足定理中三个条件的 A 类函数 $F_j(\zeta,z)$. 我们证明这种 A 类函数是不存在的.

事实上，由于 $F_j(\zeta,z)$ 满足条件(i)和(iii). 当固定 $z\in D$ 时，$F_j=F_j(\zeta,z)$ 作为 ζ 的函数在 $\overline{D}_\zeta$ 上全纯，且 $F_j|_{\partial D_\zeta}\neq 0$，由推论 2 立知，$F_j$ 在 D_ζ 内无零点.

另一方面，由条件(ii)知

$$F_j=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\varphi_{ji}(\zeta_z),\quad \varphi_{ji}\in A(\bar{D}_\zeta\times\bar{D}_z),\ i=1,\cdots,n.$$

因此，F_j 在 D_ζ 内 $\zeta=z$ 处有零点，这就与 F_j 在 D_ζ 内没有零点矛盾. 所以，同时满足条件(i)，(ii)，(iii)的所谓 A 类函数根本不存在.

重复定理 1 的证明立得下面的推论

推论 3 C^n 空间中任何有界域上绝不存在 A 类全纯的支撑函数. 换而言之，即 $C^n(n\geqslant2)$ 中有界域上不存在类似单变数具有全纯核的在区域整体边界上的 Cauchy 积分公式.

上面的定理和推论揭示了多复变数与单复变数的一个本质的区别. 它无论对积分表示的研究和应用都是极为重要的. 文[3]p155 页中宣称：多面体域上可寻得支撑函数 $\varphi\in A$. 显然也是错误的. 即使是多园柱域或 Weil 解析多面体域上的全纯的支撑函数也显然不属于 A 类，因为它们并不满足 A 类定义中的条件(iii). 而且 S. G. Krantz 早在 1982 年(参见文[17]p114 页)就指出 C^n 中，中心在原点的单位三园柱域 D，在 ∂D 上点 $p(0,0,1)$ 不存在任何全纯的支撑函数(即文[1]－[11]中所谓的 A 类和 C 类全纯的支撑函数). 1973 年 J. J. Kohn 和 L. Nirenberg 则指出存在 C 中的全纯域，但它不存在任何全纯的支撑函数[16]. 他们的研究在积分表示的研究同行中引起了巨大的关注，但尚未从理论上彻底阐明问题.

关于多复变数积分表示的研究，钟同德教授已在文献[13]和[15]中做了系统又精碎的论述. 在此基础上，我们认为多复变数积分表示的关键是寻找并证明存在具有较好性质和适用性的支撑函数. 毫无疑问，支撑函数与域的边界几何结论和性状，如凸性等是紧密联系的. 换言之，即与域的分类有关. 因此，令人更感兴趣的是能否突破一些新的域类和某些复流形上的积分表示，如拟凸域，Stein 流形等，并在求解 $\bar{\partial}$-方程和研究函数性质等方面推广应用，而不是仅仅局限于毫无根据的假设和形式上的变化.

二　积分表示研究中存在的若干问题

目前许多积分表示的文章[1]－[12]，由于忽视了多复变数与单复变数的本质区别，错误地在各种有界域上假设存在 A 类函数. 同时，对一些基本概念的定义和实质，以及它们之间的联系和区别没有足够了解. 例如，把 C^n 空间中缝空间，缝空间链和边界，边缘链混为一谈，对可剖分的域，逐块光滑边界的域，多面体域，强拟凸多面体域和 Weil 解析多面体域等不加任何区别. 同时，对高维空间域的边界几何结构，协调定向，除法定理，Stokes 定理等一些最基本的概念和性质混淆不清. 因此导致下面的若干本质错误：

1. 在各种有界域上假设存在所谓的 A 类函数，对有界域的边界结构模糊不清，导致逻辑错误的积分表示[1]－[11].

如分别在可剖分的，逐块光滑边界的，有缝空间结构的，多面体的，以及所谓可逐次应用 Stokes 定理的等各种有界域上假设存在所谓的 A 类函数，并应用它们来构造 A 类的支撑函数(如文[1]p14，文[8]p543 等). 因此，这些文章一方面毫无根据地假设存在 A 类全纯的支撑函数；另一方面，又同时假设存在 Cauchy-Fantappie 形式的支撑函数，由此来建立似乎可以包含 C－F 积分公式在内的公式. 如文[1]，[8]，[11]等多篇文章中宣称：多园柱域，Weil 多面体域，凸

区域，四类典型域，以及 Bochaer-Martinell 等积分公式都是上述文章中积分表示的特例. 这样，这些文章就完全违背了如定理 1 所揭示的多复变数与单复变数的本质区别，并导致逻辑上的颠倒. 我们姑且不论作者得到的积分公式是否正确. 按其做法. 显然正确的逻辑应当是由 C—F 公式可推出多面体域、凸区域、四类典型域等的积分公式(因为作者使用了 C—F 公式的支撑函数). 怎么能说成从其所谓的多面体域或别的域可推出包括所有的不同类型的域上的积分公式呢？甚至 C—F 公式呢？其实，凸区域与四类典型域未必都是多面体域，可剖分的域也未必都具有特征流形. 产生这些错误的原因就在于不存在 A 类全纯的支撑函数. 同时对域的边界几何结构模糊不清，把上述各种不同的域混为一谈.

2. 把缝空间链与边缘链混为一谈，定向和非定向不加区别，导致积分表示都建立在空链(空集)上的错误[1]-[4].

这些文章都假设域 D 具有逐块光滑边界 ∂D 和缝空间链：

(i) $\partial D=S^{(1)}\supset S^{(2)}\supset\cdots\supset S^{(r-1)}\supset S^{(r)}$，满足 $\partial S^{(\theta)}=S^{(\theta+1)}$, $\theta=1,\cdots,r-1$.

(ii) $\partial D=S^{(1)}\supset\cdots\supset S^{(\eta)}\supset S^{(r)}$，$S^{(r)}$ 是 $S^{(\eta)}$ 的缝，$S^{(r)}$ 的维数可以比 $S^{(\eta)}$ 的维数不止低于一维(如文[1]p11,p14,文[2]p500,p505). 还定义

$$\sigma^{(\beta)}=\sigma_1^{(\beta-1)}\supset\sigma_2^{(\beta-1)}\supset\sigma_{k+1}^{(\beta-1)},$$

其中 $\sigma_r^{(\beta-1)}=\bigcup\limits_{j_1,\cdots,j_r}\sigma_{j_1,\cdots,j_r}^{(\beta-1)}$，$\sigma_{j_1,\cdots,j_r}^{(\beta-1)}$ 是实 $2n-\beta-r+1$ 维曲面单形(如文[1]p12,文[2]p499)；并定义 θ 维单形 $\mathfrak{I}^{(\theta)}$ 满足：$\partial\mathfrak{I}^{(\theta)}=\mathfrak{I}^{(\theta-1)}$，(如文[1]p14,文[2]p500).

按照上述文章的定义，我们有

$$S^{(\theta)}=\partial\partial\cdots\partial D=0,\ 2\leqslant\theta\leqslant n,\quad \mathfrak{I}^{(\theta)}=0,\ 1\leqslant\theta\leqslant n-1,\quad \sigma_r^{(\beta-1)}=0,\ r\geqslant 2.$$

因此，积分 $\int_{S^{(\theta)}\times\mathfrak{I}^{(\theta-1)}}\omega=0$，$\omega$ 为被积微分式. 所以，上述文章的积分表示都是不成立的.

3. 积分表示的证明方法采用"反复应用 Stokes 定理"的错误[1]-[11].

熟知，对链上的微分形式的积分，通常 Stokes 公式只能使用一次. 因为对紧集或链，边缘算子 ∂ 作用二次均为零，即边缘链是闭链或 $\partial\partial=0$，对 n 维复流形上的任意一个 (p,q) 形式 ω，微分算子 d 作用二次亦有 $dd\omega=0$. 因此，上述文章的积分表示式在有界域上反复应用 Stokes 定理是错误的. 正确的做法应是应用数学归纳法.

4. 错误地认为 $\bar\partial$-方程在一般有界域上可解[2],[6],[7].

如文[6]中定理 2，$\bar\partial$-方程解的积分表示，对任意的多面体域 D 是不能成立的，并且其积分表示式由于 A 类函数不存在已经不成立. 显然必须假定 D 是强拟凸多面体域才能形式上加以讨论. 因为由文[6]Leray-Stokes 公式(4)得到公式(7)时是通过令 $\bar\partial u(\zeta)=f(\zeta)$，才得到的. 而 $\bar\partial u(\zeta)=f(\zeta)$ 成立，则必须对给定的 $f(\zeta)$，解 $u(\zeta)$ 存在才行. 但是，根据 J. J. Kohn 的理论[16]，就必须假定 D 是强拟凸的才能保证解 $u(\zeta)$ 存在.

5. 在含有积分核的奇点的域上直接应用 Stokes 定理[12].

如文[12]p248："由 Stokes 定理得

$$\int_{\partial(D\times D_0)}\varphi(z)\wedge f(\zeta)\wedge K_{n,q}=\int_{D\times D_0}d[\varphi(z)\wedge f(\zeta)\wedge K_{n,q}]$$

这显然是错误的. 因为核 $K_{n,q}$ 在域 D 内有奇点 $\zeta=z$，因此在应用 Stokes 公式时，一定要先将奇点邻域挖去.

以上所述，作者本着互相学习，实事求是和尊重科学的态度，仅提供与同行参考，有不妥之处欢迎批评指正.

参 考 文 献

[1] Chen Shujin; *Note on integral representation of holomorphic functions in several complex variables*, Rend. Som. Nat. Univ. Padova., 81(1989), 9—18.

[2] 陈叔谨，关于C 空间中全纯函数的积分表示，厦门大学学报(自然科学版)，5(1988)，497—507.

[3] 陈叔谨，多复变数函数论，厦门大学出版社，1990.

[4] 陈叔谨，多复变数连续可微分函数的积分表示及其应用，厦门大学学报(自然科学版)，3(1988)，261—266.

[5] 陈叔谨， 在C^n中多面体域上全纯函数的积分表示，厦门大学学报(自然科学版)，1(1988)，1—8.

[6] 陈叔谨，C^n空间中多面体域上的 Leray-Stokes 公式，科学通报，21(1982)，1292—1295.

[7] Chen Shujin, *Leray-Stkoes formula of polyhedron domain in space C^n*, Kexue Tongbao, 5(1983), 583—587.

[8] 陈叔谨，在C^n空间中的一个积分表示(数学学报)，4(1981)，538—544.

[9] 陈叔谨，C^n空间中多面体域上的外微分式的积分表示，厦门大学学报(自然科学版)，4(1983)，416—426.

[10] Chen Shujin, *The integral representation for polyhedral domains of C^n*, Brikhauser, Boston, Ins, U.S.A. 1984, 169—173.

[11] 陈叔谨，关于C^n中有界域上解析函数的积分表示，厦门大学学报(自然科学版)，2(1980)，1—7.

[12] 陈叔谨，具有权因子的 Range-Siu 公式，厦门大学学报(自然科学版)，3(1990)，246—250.

[13] 钟同德，多复变数的积分表示与多维奇异积分方程，厦门大学出版社，1986.

[14] АйзенБерг, Д. А. Южаконю А. Д. Интегральные предетанления и вычеты в многомерном комплексном аналнзе, Иадателнство(наука), 1979.

[15] 钟同德、黄沙，多元复分析，河北教育出版社，1990.

[16] J. J. Kohn, L. Nirenberg, Math. Ann. (201)1973, 265—268.

[17] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

Note on Integral Representations of Several Complex Variables

Lin Liangyu

(Dept. of Math., Xiamen University)

Abstract

In recent years, some papers have applied the so called A class functions to establish integral represntations on the bounded domain in C^n space. But here it is shown that this A class functions do not exist on any bounded domain in C^n $(n \geq 2)$, and we also point out some obscure-ideas and essential errors which appeared in the study of some integral representations of several complex variables in [1]-[2].

Keywords several complex variables, integral representation, support function.