第14卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

关于全图的强完美性*

张忠辅　吕新忠　王自果　申学军
(兰州铁道学院)　(西北工业大学,西安)　(海南华信集团有限公司,海口)

摘　要　本文证明了图 G 的全图 $T(G)$ 是完美的充分必要条件是 G 的块至多含有三个点. 同时,得到对全图来说强完美性猜想为真.

关键词　图,全图,完美性,充要条件.

§1　引　言

定义 1.1　简单图 $G(V,E)$ 的最大完全子图的阶数,称为 $G(V,E)$ 的团数;图 $G(V,E)$ 的团数简记为 $\omega(G)$.

定义 1.2　若对简单图 $G(V,E)$ 的任意导出子图 H,有 $\chi(H)=\omega(H)$. 则称 G 是完美的,简记作 $G\in\mathscr{P}$. 其中 $\chi(H)$ 表示 H 的色数.

1961 年,C. Berge 提出了如下的猜想:

强完美猜想　G 是完美的,当且仅当 G 或 G^C 的任意导出子图均没有长大于 3 的奇圈. 其中 G^C 表示 G 的补图.

此猜想至今没有彻底解决.

定义 1.3　记 $V(T(G))=V(G)\cup E(G)$;$E(T(G))=\{xy\,|\,x,y\in V(T(G))$,且 x 与 y 在 G 中相邻或相关联$\}$. 则称 $T(G)$ 为 G 的全图(Total graph).

在 $T(G)$ 中,$V(G)$ 称为根点,$E(G)$ 所产生的点为衍点;根点与根点间的边称为根边,衍点与衍点间的边称为衍边,根点与衍点间的边称为讯边. G 称为 $T(G)$ 的根图.

根图 G 与其全图 $T(G)$,有许多显然的性质,如 $x\in V(T(G))$,则

$$d_{T(G)}(x)=\begin{cases}2d_G(x), & x\in V(G);\\ d_G(u)+d_G(v), & x=uv\in E(G).\end{cases}$$

$$|E(T(G))|=\frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in V(G)}2d_G(x)+\sum_{x=uv\in E(G)}(d_G(u)+d_G(v))\Big)$$

等等. 对于全图,有两大理论问题没有彻底解决:

(1)　一个图是全图的充要条件是什么?

(2)　全染色猜想[1-3]对简单图 G,有

$$\chi(T(G))\leqslant\Delta(G)+2,$$

* 1991 年 12 月 5 日收到. 国家和甘肃省自然科学基金资助项目.

其中 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度.

本文不考虑全图的这两大理论问题,而考虑全图的完美性问题.

定义 1.4 设 G 是阶数大于 3 的连通图,存在 $u\in V(G)$, $d_G(u)=2$, $G-u=K_{p-1}$,则称 G 为第一类拖尾图;若 $p\geqslant 6$ 的连通图 G,有割集

$$S=\{v_1,v_2,v_3\},G[S]=K_3,G-S=G_1\cup G_2,$$

G_1,G_2 是连通的,且其中一个,比如 G_1,使 $G[S\cup V(G_1)]$ 是完全图,而

$$G[S\cup V(G_2)]=T(K_3),$$

则称 G 为第二类拖尾图. 其中 $G[X]$ 表示由 G 中的点子集 X 导出的子图, $p=|V(G)|$.

第一、第二类拖尾图,统称为拖尾图.

本文所涉及的图均为有限简单图,没加说明的术语、记号,可参看[1].

§2 主要结果

引理 2.1 设 S 是 G 的一个割点集,

$$G[S]=K_{|S|},G-S=\bigcup_{i=1}^{n}G_i',\ G_i=G[S\cup V(G_i')]\ (i=1,2,\cdots,n).$$

若 $G_i\in\mathscr{P}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $G\in\mathscr{P}$. 其中 G_1'、G_2'、$\cdots$,G_n' 为 $G-S$ 的连通分支,$G[X]$ 表示 G 中 X 的导出子图.

证明 设 H 是 G 的任意一个导出子图.

情况 1 若 $H\subseteq G_{i_0}(1\leqslant i_0\leqslant n)$. 由条件 $\chi(H)=\omega(H)$,即知结论成立.

情况 2 否则,记

$$\omega(G_i)=\omega_i、\chi(G_i)=\chi_i、H_i=H\cap G_i、H_0=H\cap G[S]、$$
$$\omega(H_i)=\omega_i'、\chi(H_i)=\chi_i'\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $G[S]$ 是一个团,所以 H_0 是一个团. 由 $H_i(i=0,1,\cdots,n)$ 构造的特殊性,在 H 的团中不可能同时包含有 $V(H_i)\backslash V(H_0)$ 的点和 $V(H_j)\backslash V(H_0)$ 的点 $(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$. 由此

$$\omega(H)=\mathrm{Max}\{\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_n'\}.$$

又因为 H_i 是完美图 G_i 的导出子图,所以 $\chi_i'=\omega_i'(i=1,2,\cdots,n)$. 在每一个 H_i 中的 χ_i'-正常染色法中,必分配给图 H_0 的每一点以不同色. 所以必然可以给出一个 H 上的 $\mathrm{Max}\{\chi_1',\chi_2',\cdots,\chi_n'\}$ 上正常染色法,即 H 是

$$\omega(H)=\mathrm{Max}\{\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_n'\}=\mathrm{Max}\{\chi_1',\chi_2',\cdots,\chi_n'\}$$

可正常染色的,故 $\chi(H)\leqslant\omega(H)$.

而 $\chi(H)\geqslant\omega(H)$ 是显然的. 从而

$$\chi(H)=\omega(H).$$

即结论成立.

综合以上两种情况,知结论成立. □

引理 2.2 若 v 是 G 的一个割点,则 v 及其关联边在 $T(G)$ 中构成一个点团割集.

此引理显然.

引理 2.3 对阶数不小于 4 的 2-连通图 G, $T(G)$ 中必含长不小于 5 的无弦奇圈导出子图.

证明 因 G 是阶数不小于 4 的 2-连通图,故 $\delta\geqslant 2$ 且[1] G 必含有长不小于 4 的圈 C.

若 C 为奇圈,则以 C 上的根点,在 $T(G)$ 中所导出的根子图(为 C)就是一个长不小于 5 的奇圈(无弦).

若 C 为偶圈.记 $C=v_1e_1v_2e_2\cdots v_{2k}e_{2k}v_1$, $k\geqslant 2$, $e_i=v_iv_{i+1}\in E(G)$,则在 $T(G)$ 中 $v_1v_2e_2e_3\cdots e_{2k}v_1$ 是长不小于 5 的无弦奇圈.其中 $e_i(i=2,3,\cdots,2k)$ 表示 $T(G)$ 中与 e_i 对应的衍点.

引理 2.4 若 $T(G)\in\mathscr{P}$,则 G 的块至多有三个点.

此引理是引理 2.3 的直接结果.

引理 2.5 若 G 是拖尾图,则 $G\in\mathscr{P}$.

证明 若 G 是第一类拖尾图,$d_G(u)=2$, $uv_1,uv_2\in E(G)$.取 $S=\{v_1,v_2\}$, S 是 G 的割集且有 $G[S]=K_2$,由引理 2.1 知 $G\in\mathscr{P}$.

若 G 是第二类拖尾图,取 $S=\{v_1,v_2,v_3\}$,而且 $G[S]=K_3$, S 是 G 的割集.易见 S 与 $G-S$ 的各分支的并导出图是完美的,由引理 2.1 知 $G\in\mathscr{P}$. □

引理 2.6 若 G 的每个块至多有三个点,则 $T(G)\in\mathscr{P}$.

证明 对 G 的块数 n 使用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,G 为 K_1 或 K_2 或 K_3,易见此时结论成立.

设 G 的块数为 $n-1$ 时结论成立,现推 G 的块数为 $n(\geqslant 2)$ 时结论也成立.

首先注意,此时 G 存在块中只有一个点为割点的块,不妨称这样的块为悬挂块.易见悬挂块为 K_2 或 K_3.

设悬挂块所关联的割点为 v_0.分两种情况讨论:

情况 1 若悬挂块为 K_2,取 S 为 v_0 知 $T(G)$ 中与 v_0 相关联的 $d_G(v_0)$ 条边所对应的衍点组成的点集.

情况 2 若悬挂块为 K_3, $V(K_3)=\{v_0,v_1,v_2\}$.记 v_0v_i 在 $T(G)$ 中的衍点为 $u_i(i=1,2)$,取 $S=\{v_0,u_1,u_2\}$.

易见上面的 S 是 $T(G)$ 的割集,且由引理 2.2 知 $T(G)[S]=K_{|S|}$.记

$$T(G)-S=\bigcup_{i=1}^{k}T_i(G)',T_i(G)=T(G[S\cup V(T_i(G)')])\ (i=1,2,\cdots,k).$$

这里 $T_1(G)',T_2(G)',\cdots,T_k(G)'$ 是 $T(G)-S$ 的连通分支.不妨设 $T_1(G)$ 为与悬挂块有关的那一部分,易见 $T_1(G)$ 为拖尾图,$T_2(G),T_3(G),\cdots,T_k(G)$ 的并为根子图块数为 $n-1$ 的图,由引理 2.5 及假设 $T_1(G)$ 及 $\bigcup_{i=2}^{k}T_i(G)$ 均是完美的.再由引理 2.1,$G\in\mathscr{P}$.

由归纳原理 $G\in\mathscr{P}$. □

由引理 2.4 及 2.6,可得本文的主要结果:

定理 2.7 $T(G)\in\mathscr{P}$ 的充要条件是 G 的每个块至多有三个点.

推论 2.8 若 G 为树,则 $T(G)\in\mathscr{P}$.

定理 2.9 对全图,"强完美猜想"为真.

证明 *必要性* 由 Lov'asz 定理[1]"任何完美图的补图的完美的",反证而得到.

充分性 用反证法由引理 2.3 及 2.6 得到. □

由定理 2.7,又可得如下推论:

推论 2.10 若 G 不为 K_2,且每一块至多有三个点的连通图,则

$$\chi_T(G) = \Delta(G) + 1,$$

其中 $\chi_T(G)$表示 G 的全色数.

对田丰教授所给予的帮助表示感谢.

参 考 文 献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, The Macmillan Press Ltd., 1976.

[2] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Printed in the United States of America, 1986.

[3] 张忠辅、张建勋、王建方，中国科学，A 辑，6(1988)，595—600.

On the Strong Perfectness of Total Graph

Zhang Zhongfu *Lu Xinzhong*

(Lanzhou Railway Institute)

Wang Ziguo *Shen Xuejun*

(Northwest Industry University) (Hainan Huaxin Group Co. Ltd.)

Abstract

This paper proves that the total graph $T(G)$ is perfect if and only if each block of G has at most three vertices, and the strong perfect conjecture is true for any total graph.

Keywords graph, total graph, perfect.