第14卷第4期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 4
1994年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1994

求解无限维线性二次最优控制问题的一种新的途径*

潘 立 平
(复旦大学数学系，上海 200433)

摘 要 本文借助 C_0 半群的 Yosida 近似构造无限维线性二次最优控制问题的相应近似，证明了后者的最优控制、Riccati 方程之解(从而反馈算子)和最优状态函数均一致强收敛，极限即为原问题的解.

关键词 无限维，线性二次最优控制，Yosida 近似.

§1 引 言

由于有着极为广泛的应用和基本的重要性的分布参数系统的最优调节器的设计理论是以无限维线性二次最优控制问题(后者在有限时区上考虑问题并以此区别于前者)的求解为基础的(参看 Gibson[2]与 Flandoli[1])，故有必要去寻觅后者的简单解法，为制定具体的求解算法提供恰当的理论基础.

本文给出的解法是:用原问题中的动态算子的 Yosida 近似，(它往往是容易被具体求得的)替代前者，得到一族线性二次最优控制问题，对于这族问题，由于其动态算子均是有界的，故其求解可完全照搬集中参数系统情形的解法. 然后证明当 Yosida 近似的参数趋于无穷大时，相应的最优控制问题之解一致强收敛，其极限即为原问题之解.

§2 结果的表述与证明

本文以 $\mathscr{L}(E_1,E_2)$ 记映 Banach 空间 E_1 入 Banach 空间 E_2 的有界线性算子全体按通常的方式所成的 Banach 空间，当 $E_1=E_2$ 时，简记之为 $\mathscr{L}(E_1)$；在算子的右上角标上“ * ”表示其对偶；$\|\cdot\|$ 表示算子或函数空间中的元素的范数，有时，为了强调它们所在的空间或避免引起误解，还在其右下角标出相应的空间；$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表内积.

考虑由如下无限维线性受控发展系统

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1 \tag{2.1}$$

与二次目标泛函

$$J(u(\cdot);t_0,x_0)=\frac{1}{2}\{\langle Wx(t_1),x(t_1)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}[\langle Qx(t),x(t)\rangle+\langle Ru(t),u(t)\rangle]dt\} \tag{2.2}$$

* 1991年6月29日收到.

构成的最优控制问题$(LQP)_{(t_0,x_0)}$：求 $\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\in\mathscr{U}_{t_0}:=L^2(t_0,t_1;U)$适合

(2.3) $$J(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0);t_0,x_0)=\min\{J(u(\cdot);t_0,x_0)\,|\,u(\cdot)\in\mathscr{U}_{t_0}\},$$

其中，t_0,t_1 是两个给定的实数，$t_0<t_1$，$x_0\in$ Hilbert 空间 X，给定．$e^{tA}(t\geqslant 0)$是 X 上的 C_0 半群，A 为其母元．$B\in\mathscr{L}(U,X)$，U 亦是一个 Hilbert 空间，$W,Q\in\mathscr{L}(X)$，$R\in\mathscr{L}(U)$，W,Q,R 均为自伴算子．

不难算出：

(2.4) $J(\cdot;t_0,x_0)$在 $u(\cdot)\in\mathscr{U}_{t_0}$ 处的 Fréchet 导数$(DJ)(u;t_0,x_0)=Ru(\cdot)-B^*\psi(\cdot)$（按 Riesz 定理，可将 $\mathscr{U}_{t_0}$ 与其对偶空间视为同一），其中

(2.5) $$\psi(t)=-\left[e^{(t_1-t)A^*}Wx(t_1)+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A^*}Qx(\tau)d\tau\right],\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

$x(\cdot)$是系统(2.1)对应于控制函数 $u(\cdot)$的状态函数；

(2.6) $J(\cdot;t_0,x_0)$在 $\mathscr{U}_{t_0}$ 中任一点 $u(\cdot)$处的 2 阶 Fréchet 导数

$$(D^2J)(u;t_0,x_0)\equiv R+B^*(\Gamma_{t_0,t_1}^*W\Gamma_{t_0,t_1}+\Gamma_{t_0}^*Q\Gamma_{t_0})B,$$

其中，$\Gamma_{t_0,t_1}\in\mathscr{L}(L^2(t_0,t_1;X),X)$，$\Gamma_{t_0}\in\mathscr{L}(L^2(t_0,t_1;X))$，它们的定义式分别为：

(2.7) $$\Gamma_{t_0,t_1}z=\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-\tau)A}z(\tau)d\tau,$$

$$(\Gamma_{t_0}z)(t)=\int_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A}z(\tau)d\tau,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\forall\ z(\cdot)\in L^2(t_0,t_1;X).$$

注意到$(D^2J)(u;t_0,x_0)$实际上与 $u(\cdot)$，x_0 无关，今后我们不妨简记之为$(D^2J)t_0$.

若

(2.8) $$(D^2J)t_0>0,$$

则 $J(\cdot;t_0,x_0)$是 $\mathscr{U}_{t_0}$ 上的严格凸的泛函，由之可知此时$(\mathrm{LQP})_{(t_0,x_0)}$之解存在唯一．显见，当 Hamilton 条件：

(2.9) $$W,Q\geqslant 0,\ \exists\ \delta_0>0,\ R\geqslant\delta_0 I_u.$$

成立时，(2.8)成立．这些都是早为人们所熟知的事实．今后，我们记系统(2.1)对应于最优控制 $\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)$的状态函数为 $\hat{x}(\cdot;t_0,x_0)$，并记相应的 $\psi(\cdot)$为 $\hat{\psi}(\cdot;t_0,x_0)$.

由 C_0 半群的理论([4])，存在 $M\geqslant 0$ 与实数 ω 使得

(2.10) $$\|e^{tA}\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant Me^{\omega t},\quad\forall\ t\geqslant 0.$$

当 $\lambda>\omega$ 时，λ 为 A 的正则点，

(2.11) $$A_\lambda:=\lambda A(\lambda-A)^{-1}\in\mathscr{L}(X),$$

(2.12) $$\|e^{t(A-\omega)_n}\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant M,\quad\forall\ t\geqslant 0,n=1,2,\cdots$$

上式蕴涵

(2.13) $$\|e^{tA(n)}\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant Me^{t\omega},\quad\forall\ t\geqslant 0,n=1,2,\cdots$$

其中，$A(n):=\omega I_X+n(A-\omega I_X)((n+\omega)I_X-A)^{-1}$. 此外，

(2.14) $$\forall\ y\in X,\ \|[e^{t(A-\omega)_n}-e^{t(A-\omega)}]y\|_X\to 0(n\to\infty).$$

从而

(2.15) $$\forall\ y\in X,\ \|[e^{tA(n)}-e^{tA}]y\|_X\to 0(n\to\infty).$$

在(2.1)－(2.3)中用 $A(n)$替代 A. 得到最优控制问题$(\mathrm{LQP})_{(t_0,x_0)}^{(n)}$. 由于 $A(n)$是有界算子，根据

有界算子所生成的半群的良好性质(见[4]),可知对$(LQP)^{(n)}_{(t_0,x_0)}$我们可采用集中参数系统情形的方法求解,完全平行地得到:

定理 1 设 Hamilton 条件(2.9)成立. 则$(LQP)^{(n)}_{(t_0,x_0)}$之解存在唯一,若以$\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)$, $\hat{x}_n(\cdot;t_0,x_0)$分别记$(LQP)^{(n)}_{(t_0,x_0)}$的最优控制和最优状态函数,则

$$\hat{u}_n(t;t_0,x_0)=R^{-1}B^*\hat{\psi}_n(t;t_0,x_0),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{2.16}$$

其中的$\hat{\psi}_n(\cdot;t_0,x_0)$适合微分方程

$$\begin{cases}\dot{\hat{\psi}}_n(t;t_0,x_0)=-A(n)^*\hat{\psi}_n(t;t_0,x_0)+Q\hat{x}_n(t;t_0,x_0), & t_0\leqslant t\leqslant t_1,\\ \hat{\psi}_n(t_1;t_0,x_0)=-W\hat{x}_n(t_1;t_0,x_0);\end{cases} \tag{2.17}$$

存在唯一$K_n(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],\mathscr{L}(X))$适合如下微分 Riccati 方程

$$\dot{K}_n(t)=-A(n)^*K_n(t)-K_n(t)A(n)+K_n(t)GK_n(t)-Q,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{2.18}$$

及定解条件$K_n(t_1)=W$,其中$G:=BR^{-1}B^*$. 并且$K_n(\cdot)$还满足:

$$\forall\, t\in[t_0,t_1],\quad K_n(t)^*=K_n(t); \tag{2.19}$$

$$\hat{\psi}_n(t;t_0,x_0)+K_n(t)\hat{x}_n(t;t_0,x_0)\equiv 0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{2.20}$$

设条件(2.8)成立. 令

$$\hat{x}_n(t;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)):=e^{(t-t_0)A(n)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A(n)}B\hat{u}(\tau;t_0,x_0)d\tau, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_n(t;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)):=&-\Big[\big(e^{(t_1-t)A(n)}\big)^*W\cdot\hat{x}_n(t_1;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))\\ &+\int_t^{t_1}\big(e^{(\tau-t)A(n)}\big)^*Qx_n(\tau;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))d\tau\Big],\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.\end{aligned} \tag{2.22}$$

因为

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_n(t;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))-\hat{x}(t;t_0,x_0)\|_X\leqslant&\ \|[e^{(t-t_0)A(n)}-e^{(t-t_0)A}]x_0\|_X\\ &+\int_{t_0}^{t}\|[e^{(t-\tau)A(n)}-e^{(t-\tau)A}]\hat{u}(\tau;t_0,x_0)\|_X d\tau.\end{aligned} \tag{2.23}$$

故由(2.15),(2.13),(2.10)并借助于控制收敛定理,从上式可得:

$$\forall\, t\in[t_0,t_1],\ \|\hat{x}_n(t;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))-\hat{x}(t;t_0,x_0)\|_X\to 0\ (n\to\infty). \tag{2.24}$$

接下来,由

$$\hat{\psi}_n(t;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))-\hat{\psi}(t;t_0,x_0)=I_1^{(n)}+I_2^{(n)}, \tag{2.25}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1^{(n)}=&\big(e^{(t_1-t)A(n)}\big)^*W[\hat{x}(t_1;t_0,x_0)-x_n(t_1;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))]\\ &+\int_t^{t_1}\big(e^{(\tau-t)A(n)}\big)^*Q[\hat{x}(\tau;t_0,x_0)-x_n(\tau;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))]d\tau,\\ I_2^{(n)}=&\big[e^{(t_1-t)A^*}-\big(e^{(t_1-t)A(n)}\big)^*\big]W\hat{x}(t_1;t_0,x_0)\\ &+\int_t^{t_1}\big[e^{(\tau-t)A^*}-\big(e^{(\tau-t)A(n)}\big)^*\big]Q\hat{x}(\tau;t_0,x_0)d\tau,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1.\end{aligned}$$

由(2.24)与(2.13),立知:

$$\|I_1^{(n)}(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\to 0\ (n\to\infty),\quad \forall\, t\in[t_0,t_1]; \tag{2.26}$$

由$A(n)$的定义式立知

$$A(n)^*=A^*(n),\quad n=1,2,\cdots. \tag{2.27}$$

据此与(2.10),(2.13)及控制收敛定理,立得:

$$\|I_2^{(n)}(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\to 0\ (n\to\infty),\quad \forall\, t\in[t_0,t_1]. \tag{2.28}$$

注意到

(2.29) $$(DJ_n)(\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0),t_0,x_0)=(DJ)(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0),t_0,x_0)=0,$$

其中 $J_n(\cdot;t_0,x_0)$是$(LQP)^{(n)}_{(t_0,x_0)}$的目标泛函. 从而由(2.4),(2.5)与(2.25),(2.26),(2.28)和(2.29),可知:

(2.30) $$\begin{aligned}&(DJ_n)(\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0),t_0,x_0)-(DJ_n)(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0),t_0,x_0)\\&=-[(DJ_n)(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0),t_0,x_0)-(DJ)(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0);t_0,x_0)]\\&=B^*[\hat{\psi}(\cdot;t_0,x_0)-\hat{\psi}_n(\cdot;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))]\xrightarrow{(\text{逐点})}0(n\to\infty).\end{aligned}$$

但(2.30)式最左端$=(D^2J_n)_{t_0}[\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)]$,

(2.31) $$\begin{aligned}&\|(D^2J_n)_{t_0}[\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\cdot\|\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\\&\geqslant\langle(D^2J_n)_{t_0}[\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)],\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\rangle.\end{aligned}$$

下面进一步设 Hamilton 条件(2.9)成立. 此时(2.31)式右端$\geqslant\delta_0\|\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\Rightarrow$

(2.32) $$\begin{aligned}&\|\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\\&\leqslant\frac{1}{\delta_0}\|B^*[\hat{\psi}(\cdot;t_0,x_0)-\psi_n(\cdot;\hat{u}(\cdot;t_0,x_0))]\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\\&\xrightarrow{\text{由控制收敛定理}}0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

由于 $\hat{x}_n(t;t_0,x_0)-x(t;t_0,x_0)=I_3^{(n)}+I_4^{(n)}$,其中

$$I_3^{(n)}(t):=\int_{t_0}^{t}e^{(t-\tau)A(n)}[\hat{u}_n(\tau;t_0,x_0)-\hat{u}(\tau;t_0,x_0)]d\tau,$$

$$I_4^{(n)}(t):=\int_{t_0}^{t}[e^{(t-\tau)A(n)}-e^{(t-\tau)A}]\hat{u}(\tau;t_0,x_0)d\tau+[e^{(t-t_0)A(n)}-e^{(t-t_0)A}]x_0,$$

而由(2.13),(2.32)及 Cauchy-Schwarz 不等式,可知

(2.33) $$\|I_3^{(n)}(t)\|_X\overset{\text{关于}t\in[t_0,t_1]}{\Rightarrow}0(n\to\infty);$$

其次,由(2.15)及控制收敛定理,可知:

(2.34) $$\|I_4^{(n)}(t)\|_X\to0(n\to\infty),\forall\ t\in[t_0,t_1].$$

故

(2.35) $$\|\hat{x}_n(t;t_0,x_0)-\hat{x}(t;t_0,x_0)\|_X\to0(n\to\infty),t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

紧接着,由

(2.36) $$\hat{\psi}_n(t;t_0,x_0)-\hat{\psi}(t;t_0,x_0)=I_5^{(n)}+I_6^{(n)},$$

其中

$$\begin{aligned}I_5^{(n)}(t)=-\{&e^{(t_1-t)A(n)^*}W[\hat{x}_n(t_1;t_0,x_0)-\hat{x}(t_1;t_0,x_0)]\\&+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A(n)^*}Q[\hat{x}_n(\tau;t_0,x_0)-\hat{x}(\tau;t_0,x_0)]d\tau\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_6^{(n)}-\{=&[e^{(t_1-t)A(n)^*}-e^{(t_1-t)A^*}]W\hat{x}(t_1;t_0,x_0)\\&+\int_t^{t_1}[e^{(\tau-t)A(n)^*}-e^{(\tau-t)A^*}]Q\hat{x}(\tau;t_0,x_0)d\tau\},\end{aligned}$$

由(2.13),(2.35)并利用 Cauchy-Schwarz 不等式与控制收敛定理,立知:

(2.37) $$\|I_5^{(n)}(t)\|_X,\|I_6^{(n)}(t)\|_X\to0(n\to\infty),\ \forall\ t\in[t_0,t_1].$$

所以

$$(2.38)\qquad \|\hat{\varphi}_n(t;t_0,x_0)-\hat{\psi}(t;t_0,x_0)\|_X\to 0(n\to\infty),\ \forall\ t\in[t_0,t_1].$$

特别，

$$(2.39)\qquad \|\hat{\varphi}_n(t_0;t_0,x_0)-\hat{\psi}(t_0;t_0,x_0)\|_X\to 0(n\to\infty).$$

在(2.20)中特别取 $t=t_0$，得：

$$(2.40)\qquad \hat{\varphi}_n(t_0;t_0,x_0)=-K_n(t_0)x_0.$$

所以我们有

$$(2.41)\qquad \|K_n(t_0)x_0+\hat{\psi}(t_0;t_0,x_0)\|_X\to 0(n\to\infty).$$

下面估计 $\|K_n(t_0)x_0\|_X$. 回顾(2.29)式，我们有：

$$\begin{aligned}(2.42)\qquad &\|(DJ)(0;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\|\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\\ &\geqslant\langle(DJ)(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0);t_0,x_0)-(DJ)(0;t_0,x_0),\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)-0\rangle\\ &=\langle(D^2J)_{t_0}(\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)),\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\rangle\geqslant\delta\|\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|^2_{\mathscr{U}_{t_0}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}(2.43)\qquad \|\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}&\leqslant\frac{1}{\delta}\|(DJ)(0;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\\ &\leqslant\sqrt{t_1-t_0}[Me^{\omega(t_1-t_0)}]^2[\|W\|_{\mathscr{L}(X)}\\ &\quad+(t_1-t_0)\|Q\|_{\mathscr{L}(X)}](\text{以 } M_1 \text{ 记之})\|x_0\|_X.\end{aligned}$$

由该式和(2.11)式，可得：

$$\begin{aligned}(2.44)\qquad \|\hat{x}(t;t_0,x_0)\|_X&\leqslant M(1+\sqrt{t_1-t_0}\,M_1)e^{\omega(t_1-t_0)}\\ &\quad\cdot(\text{以 } M_2 \text{ 记之})\|x_0\|_X,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}(2.45)\qquad \|\hat{\psi}(t;t_0,x_0)\|_X&\leqslant MM_2[\|W\|_{\mathscr{L}(X)}+\sqrt{t_1-t_0}\cdot\|Q\|_{\mathscr{L}(X)}]\\ &\quad\cdot e^{\omega(t_1-t_0)}(\text{以 } M_3 \text{ 记之})\|x_0\|_X,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.\end{aligned}$$

同理

$$(2.46)\qquad \|\hat{\varphi}_n(t;t_0,x_0)\|_X\leqslant M_3\|x_0\|_X,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

在(2.45)，(2.46)中，特别取 $t=t_0$，便得：

$$(2.47)\qquad \|\hat{\psi}(t;t_0,x_0)\|_{X_1}\|\hat{\varphi}_n(t;t_0,x_0)\|_X\leqslant M_3\|x_0\|_X.$$

从而由 x_0 的任意性和(2.41)，立得：

$$(2.48)\qquad \|K_n(t_0)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant M_3.$$

任取 $s\in[t_0,t_1]$，$y\in X$，考虑 $(\mathrm{LQP})^{(n)}_{(s,y)}$，重复上述推导，即得：

$$(2.49)\qquad \|K_n(s)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant M_3.$$

另外，由定理 1 可知 $\hat{x}_n(\cdot;t_0,x_0)$ 线性地依赖于 x_0，从而 $\hat{\varphi}_n(\cdot;t_0,x_0)$ 亦线性地依赖于 x_0，再注意到(2.39)，便知 $\hat{\psi}(\cdot;t_0,x_0)$ 线性地依赖于 x_0(这一点也可用 Hilbert 空间上的二次泛函的极值原理直接推知). 故由(2.47)，知：$x_0\to\hat{\psi}(t_0;t_0,x_0)$ 定义了一个 $X\to X$ 的有界线性算子，以 $K(t_0)$ 记之，$\|K(t_0)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant M_3$. 同理，$y\to\hat{\psi}(\cdot;s,y)$ 定义了一个 $\mathscr{L}(X)$ 中的元素 $K(s)$，并且

$$(2.50)\qquad \|K(s)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant M_3.$$

(2.51) 方程 $K_n(s)y=-\hat{\varphi}_n(s;s,y)\xrightarrow{n\to\infty}-\hat{\psi}(s;s,y)=K(s)y$. 下证 $K(\cdot)$ 适合如下积分

Riccati 方程

(2.52) $$L(t)=e^{(t_1-t)A^*}We^{(t_1-t)A}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A^*}I(L)(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

其中 $I(L)(t):=Q-L(t)GL(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$. 下证$\forall\ t\in[t_0,t_1]$，

(2.53) $$e^{(t_1-t)A(n)^*}We^{(t_1-t)A(n)}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A(n)^*}I(K_n)(\tau)e^{(\tau-t)A(n)}d\tau$$
$$\xrightarrow[\text{弱}]{n\to\infty}e^{(t_1-t)A^*}We^{(t_1-t)A}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A^*}I(K)(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau.$$

任取 $y_1,y_2\in X$，则

(2.54) $$\langle[e^{(t_1-t)A(n)^*}We^{(t_1-t)A(n)}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A(n)^*}I(K_n)(\tau)e^{(\tau-t)A(n)}d\tau]y_1,y_2\rangle$$
$$=\langle We^{(t_1-t)A(n)}y_1,e^{(t_1-t)A(n)}y_2\rangle+\int_t^{t_1}[\langle Qe^{(\tau-t)A(n)}y_1,e^{(\tau-t)A(n)}y_2\rangle$$
$$-\langle GK_n(\tau)e^{(\tau-t)A(n)}y_1,K_n(\tau)e^{(\tau-t)A(n)}y_2\rangle]d\tau.$$

注意到 $K_n(\tau)e^{(\tau-t)A(n)}-K(\tau)e^{(\tau-t)A}=K_n(\tau)[e^{(\tau-t)A(n)}-e^{(\tau-t)A}]+[K_n(\tau)-K(\tau)]e^{(\tau-t)A}$，由(2.15)，(2.49)，(2.51)，上面的(2.54)右端 $\xrightarrow{n\to\infty}\langle We^{(t_1-t)A}y_1,e^{(t_1-t)}y_2\rangle+\int_t^{t_1}[\langle Qe^{(\tau-t)A^*}y_1,e^{(\tau-t)A}y_2\rangle-\langle GK(\tau)e^{(\tau-t)A}y_1,K(\tau)e^{(\tau-t)A}y_2\rangle]d\tau=\langle[e^{(t_1-t)A^*}We^{(t_1-t)A}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A^*}I(K)(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau]y_1,y_2\rangle$. (2.53)得证.

由(2.18)可知：

$$\frac{d}{dt}[e^{tA(n)^*}\dot{K}_n(t)+K_n(t)A(n)e^{tA(n)}]=e^{tA(n)^*}[K_n(t)+A(n)^*K_n(t)]e^{tA(n)}$$
$$=e^{tA(n)^*}[K_n(t)GK_n(t)-Q]e^{tA(n)},\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

并注意到 $K_n(t_1)=W$，我们有：

(2.55) $$K_n(t)=e^{(t_1-t)A(n)^*}We^{(t_1-t)A(n)}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A(n)^*}[Q-K_n(\tau)GK_n(\tau)]\cdot e^{(\tau-t)A(n)}d\tau,t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

$\Rightarrow\forall\ t\in[t_0,t_1],y_1,y_2\in X$，

(2.56) $\langle K_n(t)y_1,y_2\rangle=$(2.55)式右端.

令 $n\to\infty$，由(2.51)，(2.53)及上式立得：

(2.57) $$\langle K(t)y_1,y_2\rangle=\langle[e^{(t_1-t)A^*}We^{(t_1-t)A}+\int_t^{t_1}e^{(\tau-t)A^*}I(K)(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau]y_1,y_2\rangle.$$

$\xRightarrow{\text{由Hahn-Banach定理}}$ $K(\cdot)$适合 Riccati 方程(2.52). 另外由(2.19)和(2.51)，还可知：

(2.58) $$K(t)^*=K(t),\quad\forall\ t\in[t_0,t_1].$$

方程(2.52)之解的唯一性则不难由 Gronwall 的引理得到. 由 $K(\cdot)$的定义与(2.4)，(2.29)式，可知：

(2.59) $$\hat{u}(t_0;t_0,x_0)=-R^{-1}B^*K(t_0)\hat{x}(t_0;t_0,x_0).$$

同理，对$(LQP)_{(s,\hat{x}(s;t_0,x_0))}$，可得：

(2.60) $$\hat{u}(s;s,\hat{x}(s;t_0,x_0))=-R^{-1}B^*K(s)\hat{x}(s;s,\hat{x}(s;t_0,x_0))$$
$$=-R^{-1}B^*K(s)\hat{x}(s;t_0,x_0).$$

但根据最优原理：

(2.61) $$\hat{u}(s;s,\hat{x}(s;t_0,x_0)=\hat{u}(s;t_0,x_0).$$

故

(2.62) $$\hat{u}(s;t_0,x_0)=-R^{-1}B^*K(s)\hat{x}(s;t_0,x_0),\quad t_0\leqslant s\leqslant t_1.$$

综上所述，我们得到如下关于$(\mathrm{LQP})_{(t_0,x_0)}$的结果：

定理 2 假设条件同定理 1，即设 Hamilton 条件成立. 则

(2.63) $$\|\hat{u}_n(\cdot;t_0,x_0)-\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)\|_{\mathscr{U}_{t_0}}\to 0;$$
$$\|\hat{x}_n(t;t_0,x_0)-\hat{x}(t;t_0,x_0)\|_X\to 0,$$
$$\|[K_n(t)-K(t)]y\|_X\to 0,\quad \forall\, y\in X, t\in[t_0,t_1].$$

$(\mathrm{LQP})_{(t_0,x_0)}$的最优实时状态反馈解为：

(2.64) $$\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)=-R^{-1}B^*K(\cdot)\hat{x}(\cdot;t_0,x_0).$$

在(2.63)和(2.64)中，$\hat{u}(\cdot;t_0,x_0)$，$\hat{x}(\cdot;t_0,x_0)$的意义同前，$K(\cdot)$是积分 Riccati 方程(2.52)的唯一强连续解.

注 实际上，我们还可进一步证明(2.63)第二，三两式中的收敛关于 $t\in[t_0,t_1]$是一致的.

参 考 文 献

[1] F. Flandoli, *Algebraic Riccati equation arising in boundary control*, SIAM J. Contr. Optimi, 14(1976), 612—636.

[2] J. S. Gibson, SIAM J. Contr. Optimi. 17(4) 11979, 537—565.

[3] J. K. Hale, *Theory of Functional Differectial Equation*, Springer-Verlag, 1977.

[4] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equtions.* Springer-Verlag, 1988.

A New Approach to Infinite Dimensional LQ Optimal Control Problem

Pan Liping

(Dept. of Math., Fudan University, Shanghai, China)

Abstract

In this paper we construct the corresponding approximation of the solution to infirite dimensional LQ optimal control problem by virtue of Yosida approximation of the dynamic operator, which is shown strongly converges to the solution of the original problem.

Keywords Infinite dimensional, optimal control, Yosida approximation.