第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

一类高阶多维非线性伪双曲方程*

肖 黎 明
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

摘 要 本文研究了一类高阶多维非线性伪双曲方程，通过先验估计结合 Sobolev 嵌入定理及 Leary-Schauder 不动点定理证明了初边值问题整体广义解的存在性和唯一性.

关键词 能量积分，Sobolev 嵌入定理，Leary-Schauder 不动点定理，整体广义解.
分类号 AMS(1991) 35Q53/CCL O175.24

§1 引 言

非线性伪双曲方程是从动物神经传播，具有粘性效应杆纵振动等生物，力学中提出的一类重要的非线性偏微分方程，它的研究具有重要的理论与实际意义. 文[1]研究了一类二阶非线性伪双曲方程，文[2]研究了一类高阶非线性伪双曲组，但空间变量是一维的. 关于高阶多维非线性伪双曲方程的研究在已有文献中还未见到，本文研究了一类高阶多维非线性伪双曲方程，证明了初边值问题整体广义解的存在性与唯一性.

设 Ω 为 R^n 中($n\geqslant 2$)具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$\forall\ T>0, 0\leqslant t\leqslant T, Q_t=\Omega\times[0,t]$,

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, M\geqslant 1 \text{ 为正整数；}$$

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\ [u,v]=\int_0^t(u,v)dt,\ |u|^2_{L_2(\Omega)}=(u,u),\ \|u\|^2_{L_2(Q_t)}=[u,u];$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n),\ |\gamma|=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n;$$

$$D^\gamma=\frac{\partial^\gamma}{\partial x_1^{\gamma_1}\partial x_2^{\gamma_2}\cdots\partial x_n^{\gamma_n}},\ \gamma_i(i=1,2,\cdots,n) \text{ 为非负整数，}$$

$u(x,t)\in L_2[0,T;H^M(\Omega)]$表示为 t 固定时，$u(x,t)\in H^M(\Omega)$且 $u(x,t)$的 $H^M(\Omega)$模关于 t 在$[0,T]$上是平方可积的，其它均按[3]理解.

我们考虑如下初边值问题：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}u_{tt}+(-1)^MA\Delta^Mu_t+(-1)^MB(t)\Delta^Mu=f(u),\\ D^\gamma u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1,\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x),\end{cases}$$

* 1992年2月19日收到. 94年11月1日收到修改稿. 贵州省科学技术基金资助课题.

这里 $A>0$ 为常数，$B(t),B'(t)$ 有界，对任意矢量值函数 $\vec{v}$.

(A₁)　$(B(t)\vec{v}(x),\vec{v}(x))\geqslant -b_0(\vec{v}(x),\vec{v}(x))$ $(b_0>0)$，$\varphi(x)\in H^{2M}(\Omega)$，$\psi(x)\in H^{2M}(\Omega)$.

f 满足：$f(\varphi(x))\in L_2(\Omega)$，$f\in C^1$，$f'\leqslant K_0$（$K_0$ 为正常数）

$$(\mathrm{A}_2)\quad\begin{cases}|f(u)|\leqslant a_1+b_1|u|^{p/2}\ (a_1,b_1\ \text{为正常数}),\\ (1)\ 2M<n,\ 2\leqslant p<\dfrac{2n}{n-2M},\\ (2)\ 2M\geqslant n,\ 2\leqslant p<+\infty,\\ |f'(u)|\leqslant a_2+b_2|u|^{q/2}\ (a_2,b_2\ \text{为正常数}),\\ (3)\ 2M<n,\ 0<q<\dfrac{4M}{n-2M},\\ (4)\ 2M\geqslant n,\ 0<q<+\infty.\end{cases}$$

引理 1　若 $f(s)$ 满足 $f\in C^1$，$f'\leqslant K_0$，则有如下分解 $f(s)=f_1(s)+f_2(s)$，其中 $f_i\in C^1(i=1,2)$，$f_1(0)=0$，$f_1'(0)\leqslant 0$.

证明　取 $f_1(s)=f(s)-K_0s-f(0)$ 即可.

由上述分解：记 $F(u)=-\int_0^u f_1(s)ds$，则 $F(u)\geqslant 0$. 由条件(A₂)及 $\varphi(x)\in H^{2M}(\Omega)$，我们有

$$(\mathrm{A}_3)\qquad F(\varphi(x))\in L_1(\Omega).$$

引理 1.2[4] (Nirenberg 不等式)　设若 $u(t,\cdot)\in W_2^M(\Omega)$，$M\geqslant 1$，则有不等式

$$|u(t,\cdot)|_{L_p(\Omega)}\leqslant C|u(t,\cdot)|^{a}_{W_2^M(\Omega)}|u(t,\cdot)|^{1-a}_{L_2(\Omega)},\quad \forall\, t\in[0,T],$$

其中 $\dfrac{1}{p}=a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{M}{n}\right)+\dfrac{1}{2}(1-a)=\dfrac{1}{2}-a\dfrac{M}{n}$，$0\leqslant a\leqslant 1$. 特别当 $n<2M$ 时，$p=+\infty$.

§2　先验估计

下面我们将作出(Ⅰ)解的先验估计

引理 2.1　若 $B(t),B'(t)$ 有界，$\varphi(x)\in H^{2M}(\Omega)$，$\psi(x)\in H^{2M}(\Omega)$，$f\in C^1$，$f'\leqslant K_0$，(A₁)，(A₃)成立，则有估计式：

$$|u|^2_{L_2(\Omega)}+|u_t|^2_{L_2(\Omega)}+|\nabla^M u|^2_{L_2(\Omega)}+\int_\Omega F(u)dx+\int_0^t|\nabla^M u_t|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant \mathrm{const}\quad(0\leqslant t\leqslant T).$$

证明　用 u_t 与(Ⅰ)中方程两端作内积利用 Green 第一恒等式以后等式两端从 0 到 t 积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(u_t,u_t)+\frac{1}{2}(B(t)\nabla^M u,\nabla^M u)+\int_\Omega F(u)dx+\int_0^t A(\nabla^M u_t,\nabla^M u_t)dt\\ &=\frac{1}{2}(\psi,\psi)+\frac{1}{2}(B(0)\nabla^M\varphi,\nabla^M\varphi)+\int_\Omega F(\varphi(x))dx+\frac{1}{2}\int_0^t(B'(t)\nabla^M u,\nabla^M u)dt\\ &\quad+\int_0^t(K_0u+f(0),u_t)dt.\end{aligned}$$

两边加上 $[u,u_t]+(b_0+1)[\nabla^M u,\nabla^M u_t]$，在左边将它化为 $\dfrac{1}{2}(u,u)-\dfrac{1}{2}(\varphi,\varphi)+\dfrac{b_0+1}{2}(\nabla^M u,\nabla^M u)-\dfrac{b_0+1}{2}(\nabla^M\varphi,\nabla^M\varphi)$，在右边将它估计为

$$[u,u_t]+(b_0+1)[\nabla^M u,\nabla^M u_t]\leqslant[u,u]+[u_t,u_t]+\frac{\varepsilon}{2}(b_0+1)[\nabla^M u_t,\nabla^M u_t]$$
$$+\frac{b_0+1}{2\varepsilon}[\nabla^M u,\nabla^M u].$$

由条件(A_1)得：

$$\frac{1}{2}(B(t)\nabla^M u,\nabla^M u)+\frac{b_0+1}{2}(\nabla^M u,\nabla^M u)\geqslant\frac{1}{2}(\nabla^M u,\nabla^M u).$$

取 ε 充分小：$\Lambda-\frac{\varepsilon(b_0+1)}{2}\geqslant\frac{\Lambda}{2}$. 由 $B'(t)$ 有界及 Gronwall 不等式得引理 2.1 结论.

引理 2.2　若在引理 2.1 条件下加上(A_2)成立，则有估计：

$$|\nabla_x^M u_t|^2_{L_2(\Omega)}+|\Delta^M u|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta^M u_t\|^2_{L_2(Q_t)}\leqslant\text{const}\quad(0\leqslant t\leqslant T)$$

证明　用$(-1)^M\Delta^M u_t$与(Ⅰ)中方程两边作内积先利用 Green 第一恒等式再两端从 0 到 t 积分得

$$\frac{1}{2}(\nabla^M u_t,\nabla^M u_t)+\frac{1}{2}(B(t)\Delta^M u,\Delta^M u)+\Lambda[\Delta^M u_t,\Delta^M u_t]=\frac{1}{2}(\nabla^M\psi,\nabla^M\psi)$$
$$+\frac{1}{2}(B(0)\Delta^M\varphi,\Delta^M\varphi)+\frac{1}{2}[B'(t)\Delta^M u,\Delta^M u]+[f(u),(-1)^M\Delta^M u_t].\tag{2.1}$$

由条件(A_2)，$[f(u),f(u)]\leqslant C_1[1+\|u\|^p_{L_p(Q_t)}]$，据 Nirenberg 不等式，$\forall\, t\in[0,T]$

(*)　　$|u(t,\cdot)|_{L_p(\Omega)}\leqslant C|u(t,\cdot)|^{1-a}_{L_2(\Omega)}|\nabla_x^M u(t,\cdot)|^a_{L_2(\Omega)}|<+\infty.$

(1)　当 $2M<n$，$2\leqslant p\leqslant\frac{2n}{n-2M}$；

(2)　当 $2M\geqslant n$，$2\leqslant p<+\infty$，$0\leqslant a\leqslant 1$，$a=\frac{n}{M}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. 故

$$[f(u),f(u)]\leqslant C_1[1+\|u\|^p_{L_p(Q_t)}]<+\infty(0\leqslant t\leqslant T).$$

等式(2.1)两边加上$(b_0+1)[\Delta^M u,\Delta^M u_t]$，做类似于引理 2.1 的计算，由 $B'(t)$ 有界性及 Gronwall 不等式得引理 2.2 结论.

引理 2.3　若引理 2.2 条件成立，则有估计

$$|u_{tt}(x,t)|^2_{L_2(\Omega)}+\|\nabla^M u_{tt}\|^2_{L_2(Q_t)}\leqslant\text{const}\quad(0\leqslant t\leqslant T).$$

证明　将(Ⅰ)中方程关于 t 求导，用 u_{tt} 与求导后方程两端作内积并利用 Green 第一恒等式得：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_{tt},u_{tt})+\Lambda(\nabla^M u_{tt},\nabla^M u_{tt})$$
$$=(f'(u)u_t,u_{tt})-((-1)^M B'(t)\Delta^M u,u_{tt})-(B(t)\nabla^M u_t,\nabla^M u_{tt}).\tag{2.2}$$

由 $f(u)=\int_0^u f'(s)ds+f(0)$ 及 $|f'(u)|\leqslant a_2+b_2|u|^{q/2}(a_2,b_2>0)$知

$$|f(u)|\leqslant|f(0)|+a_2|u|+\frac{b_2}{1+q/2}|u|^{1+q/2}.$$

因$\frac{q}{2}+1<\frac{2n}{n-2M}$，前面所有结论成立.

分 $2M<n$，$2M>n$，$2M=n$ 三种情况讨论，利用引理 2.1，引理 2.2，Sobolev 嵌入定理经计算可得估计：

$$(f'(u)u_t,u_{tt}) < \frac{\tilde{c}_1}{2\varepsilon_1}|\nabla_x^M u_t|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\varepsilon_1\tilde{c}_1}{2}|\nabla_x^M u_{tt}|^2_{L_2(\Omega)} + 2\tilde{c}_2(1 + |u_{tt}|^2_{L_2(\Omega)}) \tag{2.3}$$

其中 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2$ 为与 u 无关正常数.

由 $B'(t)$有界性及引理 2.2 得：

$$-((-1)^M B'(t)\Delta^M u,u_{tt}) \leqslant c_3(1 + |u_{tt}|^2_{L_2(\Omega)}), \tag{2.4}$$

$$-(B(t)\nabla^M u_t,\nabla^M u_{tt}) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}(\nabla^M u_{tt},\nabla^M u_{tt}) + \frac{1}{2\varepsilon_2}\tilde{c}_3. \tag{2.5}$$

将(2.3)－(2.5)代入(2.2)，取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 充分小：$A - \frac{\varepsilon_1\tilde{c}_1}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2} \geqslant \frac{A}{2}$. 将(2.2)两边从 0 到 t 积分得：

$$\frac{1}{2}(u_{tt},u_{tt}) + \frac{A}{2}[\nabla^M u_{tt},\nabla^M u_{tt}] \leqslant \frac{1}{2}(u_{tt}(x,0),u_{tt}(x,0)) + K\int_0^t(1 + |u_{tt}|^2_{L_2(\Omega)})dt. \tag{2.6}$$

用 u_{tt} 与方程两边作内积并令 $t=0$ 经计算得：$|u_{tt}(x,0)|_{L_2(\Omega)} \leqslant \text{const}$.

由(2.6)及 Gronwall 不等式可得引理 2.3 结论.

类似于引理 2.1－2.3 证明过程，我们可得

引理 2.4 若引理 2.3 条件成立，则有估计 $|\Delta^M u_t|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \text{const}\ (0\leqslant t\leqslant T)$.

§3 线性问题

为研究非线性问题（Ⅰ），我们首先研究如下线性问题（Ⅱ）：

$$(\text{Ⅱ})\quad \begin{cases} u_{tt} + (-1)^M A\Delta^M u_t + (-1)^M B(t)\Delta^M u = h(x,t),\ x\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ D^\gamma u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

这里 $h(x,t)$及 $h_t(x,t)$属于 $L_\infty[0,T;L_2(\Omega)]$，§1 中其它条件均满足.

令 $v(x,t)=u(x,t)-\varphi(x)-t\psi(x)$，则 $v(x,t)$满足

$$(\text{Ⅲ})\quad \begin{cases} u_{tt} + (-1)^M A\Delta^M v_t(x,t) + (-1)^M B(t)\Delta^M v(x,t) = \tilde{h}(x,t), \\ D^\gamma v(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1, \\ v(x,0) = \varphi(x), \\ v_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

这里 $\tilde{h}(x,t)=h(x,t)-(-1)^M A\Delta^M\psi(x)-(-1)^M B(t)\Delta^M(\varphi(x)+t\psi(x))$.

由 $h(x,t)\in L_2(Q_t)$，$h_t(x,t)\in L_2(Q_t)$知 $\tilde{h}(x,t)\in L_2(Q_t)\,(0\leqslant t\leqslant T)$.

为解问题（Ⅱ），只需解问题（Ⅲ）.

设$\{w_j(x)\}$为问题

$$\begin{cases} (-1)^M\Delta^M w_j = \lambda_j w_j, \\ D^\gamma w_j(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1. \end{cases}$$

的特征函数，由[5](p239 定理 7.23)，$\{w_j(x)\}$构成 $L_2(\Omega)$的一组正交完备系且 $w_j(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$.

作（Ⅲ）Galerkin 逼近解 $u_N(x,t) = \sum_{j=1}^N a_{jN}(t)w_j(x)$. 由 Galorkin 方法，$a_{jN}(t)\,(j=1,2,\cdots,N)$

应满足下列常微分方程组的初值问题：

$$(*)\quad \begin{cases} u_{Ntt}(x,t),w_j(x)+(-1)^M A\Delta^M u_{Nt}(x,t),w_j(x)) \\ \quad +((-1)^M B(t)\Delta^M u_N(x,t),\ w_j(x)) = (\tilde{h}(x,t),w_j(x)), \\ a_{jN}(0)=0, \\ a'_{jNt}(0)=0 \quad (j=1,2,\cdots,N). \end{cases}$$

由线性常微分方程理论知，该初值问题存在唯一解 $a_{jN}(t)(j=1,2,\cdots,N)(0\leqslant t\leqslant T)$. 作类似于引理 2.1—2.4 的计算我们可得估计式：

$$|u_N|^2_{L_2(\Omega)}+|u_{Nt}|^2_{L_2(\Omega)}+|\nabla^M u|^2_{L_2(\Omega)}+|\nabla^M u_t|^2_{L_2(Q_t)}\leqslant \text{const}, \tag{3.1}$$

$$|\nabla^M_x u_{Nt}|^2_{L_2(\Omega)}+|\Delta^M u_N|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta^M u_{Nt}\|^2_{L_2(Q_t)}\leqslant \text{const}, \tag{3.2}$$

$$|u_{Ntt}(x,t)|^2_{L_2(\Omega)}+\|\nabla^M_x u_{Ntt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_t)}\leqslant \text{const} \tag{3.3}$$

$$|\Delta^M_x u_{Nt}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant \text{const} \tag{3.4}$$

其中 $0\leqslant t\leqslant T$.

定义 $u(x,t)$称为(Ⅰ)的广义解，若

(i) $u(x,t)\in L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]$, $u_t(x,t)\in L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]$,

$u_{tt}(x,t)\in L_\infty[0,T;L_2(\Omega)]\cap L_2(0,T;H^M(\Omega))$；

(ii) $\forall\ \varphi(x,t)\in C[0,T;L_2(\Omega)]$成立

$$(u_{tt},\varphi)+((-1)^M A\Delta^M u_t,\varphi)+((-1)^M B(t)\Delta^M u,\varphi)=(h(x,t),\varphi)\quad(0\leqslant t\leqslant T);$$

(iii) $u(x,0)=\varphi(x)$于 $L_2(\Omega)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$于 $L_2(\Omega)$.

注 由 $u_t(x,t)\in L_\infty(0,T;H^M(\Omega))$, $u_{tt}(x,t)\in L_\infty[0,T;L_2(\Omega)]$知 $u(x,t)$及 $u_t(x,t)$从$[0,T]$到$L_2(\Omega)$是连续的. 故(iii)有意义.

由估计式(3.1)—(3.4)及列紧性原理，可选出一子序列(仍记为$\{u_N(x,t)\}$)及 $u(x,t)$，使

$u_N(x,t)\to u(x,t)$ 弱 * 收敛于 $L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]$,

$u_{Nt}(x,t)\to u_t(x,t)$ 弱 * 收敛于 $L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]$,

$u_{Ntt}(x,t)\to u_{tt}(x,t)$ 弱 * 收敛于 $L_\infty[0,T;L_2(\Omega)]\cap L_2[0,T;H^M(\Omega)]$.

$\forall\ d_j(t)\in C[0,T](j=1,2,\cdots,N)$，将(*)式中方程乘以 $d_j(t)$，从 $j=1,2,\cdots,N'(N'\leqslant N)$相加起来，令 $N\to+\infty$，由$\{w_j(x)\}$构成 $L_2(\Omega)$正交完备系知(Ⅲ)有广义解 $u(x,t)\in L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]\cap W^1_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]\cap W^2_\infty[0,T;L_2(\Omega)]\cap W^2_2[0,T;H^M(\Omega)]$，由于方程是线性的，由估计式(3.1)—(3.4)知广义解唯一.

§4 非线性问题

考虑如下非线性问题：

$$\begin{cases} u_{tt}+(-1)^M A\Delta^M u_t+(-1)^M B(t)\Delta^M u=\lambda f(u),\ x\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ D^\gamma u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1, \\ u(x,0)=\lambda\varphi(x), \\ u_t(x,0)=\lambda\psi(x), \end{cases}$$

这里 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 为参数.

$$Z\stackrel{\triangle}{=}L_\infty[0,T;H^{2M}(\Omega)]\cap W_\infty^1[0,T;H^{2M}(\Omega)]\cap W_\infty^2[0,T;L_2(\Omega)]\cap W_2^2[0,T;H^M(\Omega)]$$

为应用不动点定理,我们取基空间:$G=L_\infty[0,T;H^M(\Omega)]\cap W_\infty^1[0,T;H^M(\Omega)]$.

$\forall\ v(x,t)\in G$,由条件(A_2)及 Hölder 不等式可推出:

$$f(v)\in L_\infty[0,T;L_2(\Omega)],\quad \frac{d}{dt}f(v)\in L_\infty[0,T;L_2(\Omega)].$$

$\forall\ v(x,t)\in G,0\leqslant\lambda\leqslant1$,由 § 3 讨论,线性问题

$$\begin{cases}u_{tt}+(-1)^MA\Delta^Mu_t+(-1)^MB(t)\Delta^Mu=\lambda f(v),\\ D^\gamma u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1,\\ u(x,0)=\lambda\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\lambda\psi(x).\end{cases}$$

存在唯一广义解 $u(x,t)\in Z\to G$("$\to$"表示嵌入),记此非线性映射 $u=T(\lambda,v):G\to G$

类似于引理 2.1－2.4 的证明过程易证 $T(\lambda,v)$关于 v 是连续的(限于篇幅,不再叙述).

设 S 为 G 一有界集,$\forall\ v(x,t)\in S,\|v\|_G\leqslant M(M>0)$,证 $T(\lambda,v)$关于 λ 在 S 上一致连续.

设 $u_1=T(\lambda_1,v),u_2=T(\lambda_2,v),w=u_1-u_2$,则 w 满足:

$$\begin{cases}w_{tt}+(-1)^MA\Delta^Mw_t+(-1)^MB(t)\Delta^Mw=(\lambda_1-\lambda_2)f(v),\\ D^\gamma w(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1,\\ w(x,0)=(\lambda_1-\lambda_2)\varphi(x),\\ w_t(x,0)=(\lambda_1-\lambda_2)\psi(x).\end{cases}$$

$\|v\|_G\leqslant M$,由条件(A_2),$\|f(v)\|_{L_2(Q_t)}\leqslant$const. 作与引理 2.1,引理 2.2 类似的计算,有

$$\|w\|_G\leqslant|\lambda_1-\lambda_2|\cdot\text{const}.$$

故 $T(\lambda,v)$关于 λ 在 S 上是一致连续的.

由于嵌入 $Z\to G$ 是紧的,故 $T(\lambda,v)$为$[0,1]\times G\to G$ 全连续算子. $\forall\ v\in G$,线性问题唯一解 $T(0,v)$为一不动元素,又由引理 2.1－2.4 知,$\forall\ u\in G,0\leqslant\lambda\leqslant1$,非线性算子方程 $T(\lambda,u)=u$ 的解有估计:$\|u\|_G\leqslant$const. 由 Leary-Schauder 不动点定理,我们得本文主要结果.

定理 1(广义解存在性) 若 $B(t),B'(t)$有界,$\varphi(x)\in H^{2M}(\Omega),\psi(x)\in H^{2M}(\Omega),f\in C^1,f'\leqslant K_0$,($A_1$),($A_2$),($A_3$)成立,则(Ⅰ)存在整体广义解 $u(x,t)\in Z$.

§ 5 广义解唯一性

设 u_1,u_2 为(Ⅰ)两个广义解,令 $w=u_1-u_2$,则

$$\begin{cases}w_{tt}+(-1)^MA\Delta^Mw_t+(-1)^MB(t)\Delta^Mw=f(u_1)-f(u_2),\\ D^\gamma w(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant M-1,\\ w(x,0)=0,\\ w_t(x,0)=0.\end{cases}$$

由中值定理 $w_{tt}+(-1)^MA\Delta^Mw_t+(-1)^MB(t)\Delta^Mw=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u}w$. "$\sim$"表示取 $u_2+\theta(u_1-u_2)(0\leqslant\theta\leqslant1)$处的值.

用 w_t 与方程两边作内积作类似于引理 2.1 的计算得如下唯一性定理.

定理 2 (广义解唯一性)　若定理 1 条件成立,则非线性问题(I)广义解唯一.

参 考 文 献

[1] Sun Hesheng, *A Nonlinear pseudo-hyperbolic system*, Science in China(series A), Vol. 32, No. 1, 1989.

[2] 刘亚成,方程 $u_{tt}-\Delta u_t=f(u)$ 的整体解,数学物理学报, Vol. 9, No. 2, 1989.

[3] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problem of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1985.

[4] 孙和生,具有强非线性项的双曲组和抛物组,偏微分方程, Vol. 1. B 辑, No. 2, 1988.

[5] Gerald B. Folland 等,偏微分方程引论,齐民友等译,高等教育出版社, 1985.

[6] 郭大钧等,非线性泛函分析,山东科技出版社, 1985.

[7] Adams 等,索伯列夫空间,叶其孝等译,人民教育出版社, 1983.

A Class of Multidimensional Nonlinear Pseudo-hyperbolic Equations of Higher Order

Xiao Liming

(Institute of Math., Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

This paper discusses a class of multidimensional nonlinear pseudo-hyperbolic equations of higher order by presenting priori estimate, Sobolev imbedding theorems and Leary-Schauder fixed point theorem. The existence and uniqueness of the initial boundary value problem are also demonstrated.

Keywords energy integral, sobolev imbedding theorems, Leary-Schauder fixed point theorem, global generalized solutions.