自然数划分中两类非通项约束*

娄惠元 邢媛弘
(沈阳黄金学院, 110015)

关键词 自然数, 划分, 约束.
分类号 AMS(1991) 11P81/CCL O156.4

自然数 n 划分为 m 个自然数之和是指将 n 表示为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_m$ 的形式, 其中 $n_1,\cdots,n_m$ 称之为项, 且 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_m\geqslant 1$. 各个项不完全相同的划分种数, 记为 $P(n,m)$. 文献[1], [2], [3]分别从不同的角度给出了某些计算公式. 我们讨论了在两类非通项约束下划分种数的某些性质及算式. 这里设 $A_1=\min(n_1-n_2)$, $A_2=\min(n_2-n_3)$, $\cdots$, $A_{m-1}=\min(n_{m-1}-n_m)$. 再设其中的 $A_p,A_q,\cdots,A_s$ 均不为零, $n_i\geqslant n_{i+1}+A_i$, $i=p,q,\cdots,s$, 这样的约束称为 A 类约束. 由于 $\{A_p,A_q,\cdots,A_s\}=A$ 是 $\{A_1,\cdots,A_{m-1}\}=A^*$ 的一个子集, 当 $A^*-A\neq\varnothing$ 时则称其为非通项的 A 类约束. A 类约束是限制两个相邻项之间的最小差. 用一组整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 与 $A_1,\cdots,A_{m-1}$ 建立对应关系

$$\begin{cases} a_{m-1}=A_{m-1}+a_m \\ a_{m-2}=A_{m-2}+a_{m-1} \\ \cdots\ \cdots \\ a_2=A_2+a_3 \\ a=a_1+a_2+\cdots+a_m \end{cases}$$

其中 $a_m=0$, 数 a 称为指标.

定理1 在指标为 a 的 A 类约束条件下, n 分为 m 项自然数之和的划分种数为

$$P_{A(a)}(n,m)=\begin{cases} P(n-a,m), & \text{当 } n-a>m \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } n-a=m \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n-a<m \text{ 时}. \end{cases}$$

设自然数集合 $B=\{B_e,B_f,\cdots,B_h\}$, 其中 $B_i=n_i-n_{i+1}$, $i=e,f,\cdots,h$. 这样的约束称为 B 类约束. 在 B 类约束的划分中非 B 类约束的相邻项间常为 A 类约束. 由定理1不妨设 $A_i=0$. 建立数组 $\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ 及 $b=b_1+\cdots+b_m$, b_i 是这样确定的: 当第 i 项与第 $i+1$ 项间是 B 类约束时, $b_i=b_{i+1}+B_i$; 否则, $b_i=b_{i+1}$. 这里称数 b 为指标. 当 $B_i\neq 0$ 时, 可以通过下面的关系式转化为 $B_i=0$ 的约束. 此时记指标为 b 的 B 类约束下的划分种数为 $P_{B(b)}(n,m|B=0)$.

定理2 在 n 分为 m 项和的划分中

* 1991年10月31日收到. 94年5月31日收到修改稿.

$$P_{B(b)}(n,m)=\begin{cases}P_{B(b)}(n-b,m|B=0) & \text{当 } n-b>m \text{ 时},\\ 1 & \text{当 } n-b=m \text{ 时}.\\ 0 & \text{当 } n-b<m \text{ 时}.\end{cases}$$

上述两个定理描述了这两类划分的基本性质，已经被我们证明了划分中如果同时存在指标为 a 的 A 类约束和指标为 b 的 B 类约束，这里用 $P_{A(a)B(b)}(n,m)$ 表示其划分种数. 利用定理 1 和定理 2 可以推出

定理 3 $P_{A(a)B(b)}(n,m)=P_{B(b)}(n-a,m)$.

定理 4 $P_{A(a)}(n,m)=P(n-a,m)$.

为简化叙述，设 B 类约束已经利用定理 2 化为 $B_i=0(i=e,f,\cdots,h)$ 的形式. 集合 $\{e,f,\cdots,h\}$ 中共有 k 个元素. $k<m-1$. 其它的约束是 A 类的，约束关系仍用 A_i 表示，同理也设 $A_i=0$. 如果存在 k 个相邻项间数值相等的 B 类约束，则可以利用布尔代数中的“容斥原理”推出一个计算划分种数的结果. 它的实质是把 B 类约束转化为 A 类约束来处理. 为书写方便，我们仅就 $k=3$ 的情形提出.

定理 5 设划分中有 3 个相邻项间的约束为数值相等的 B 类约束，分别用 B_e,B_f,B_g 表示 $n_e=n_{e+1},n_f=n_{f+1},n_g=n_{g+1}$ 的约束关系，则

$$\begin{aligned}P_{B(b)}(n,m)&=P(n,m)-P_{A(e)}(n,m)-P_{A(f)}(n,m)-P_{A(g)}(n,m)+P_{A(e+f)}(n,m)\\&\quad+P_{A(e+g)}(n,m)+P_{A(f+g)}(n,m)-P_{A(e+f+g)}(n,m)\\&=P(n,m)-P(n-e,m)-P(n-f,m)-P(n-g,m)+P(n-e-f,m)\\&\quad+P(n-e-g,m)+P(n-f-g,m)-P(n-e-f-g,m).\end{aligned}$$

自然数划分中这两类非通项约束有着广泛的实际背景和较多的应用范例. 由于篇所限这里仅举一例.

例 有 30 人参加选举，要从 8 名候选人中推选 3 人为先进工作者，得票前 3 名的人当选. 问在每个选举人随机推举一人的情况下，预测选举的成功率.

解： 这是 A 类约束的整数划分问题. 按得票由多至少排列有 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_8$，在恰有 3 人得到选票时，选举成功；在得票人数 $\geqslant 4$ 时选举成功的约束条件为 $A_3=\min(n_3-n_4)=1$. 设投票的各种可能结果总数为 N，成功的结果总数为 N_1. 由定理 1 知 $a=i\times A_i=3$. 成功率为：

$$\frac{N_1}{N}=\frac{P(n,3)+\sum_{i=4}^{8}P_{A(a)}(n,i)}{\sum_{i=1}^{8}P(n,i)}=\frac{P(30,3)+\sum_{i=4}^{8}P(27,i)}{\sum_{i=1}^{8}P(30,i)}=\frac{1527}{2462}\approx 62\%.$$

参 考 文 献

[1] M. L. Targhetta, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 37, 1967, 1—7.

[2] J. Arkin, R. Pollack, Fibonacci Quart., 8, 1970, 4—5.

[3] J. A. Ewell, J. Combinatorial Theory (A), 14, 1973, 125—127.

[4] I. Tomescu, 组合学引论(中译本)，高等教育出版社，1985.