

极小条件环中的左理想的因子分解*

王元金

(辽宁师范大学数学系, 大连 116022)

关键词 交换环, 素理想, 左理想.

分类号 AMS(1991) 13A15/CCL O153. 3

文献[1]讨论了极小条件环中左理想分解为左素理想之交的问题. 本文利用文献[1]的一些结果, 给出了极小条件环的左理想可分解为左素理想乘积的条件, 并讨论了半单纯交换环中的因子分解. 文中涉及的定义请参阅所附文献. 我们有下列结果:

定理1 设 A 为半单纯环, A_1, A_2, \dots, A_m 为其所有的单纯理想, 则 A 的任意左理想

$$L = L_1 + \cdots + L_m,$$

其中 $L_i = A_i \cap L$ ($i = 1, \dots, m$), 可分解为有限个素理想之积的充分必要条件是 L_1, \dots, L_m 中有 $m-1$ 个或者是零, 或者是 A_i .

证明 必要性 设 $L = P_1 \cdots P_n$, 其中 P_j ($j = 1, \dots, n$) 为 A 的素理想, 则 $P_j = L_{1j} + \cdots + L_{mj}$, 其中 $L_{ij} = A_i \cap P_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$).

由文献[1]定理2, 对于每一个 j , L_{1j}, \dots, L_{mj} 中有 $m-1$ 个是 A 的单纯理想, 于是

$$\begin{aligned} L &= (L_{11} + L_{21} + \cdots + L_{m1}) \cdots (L_{1n} + L_{2n} + \cdots + L_{mn}) \\ &= L_{11}L_{12}\cdots L_{1n} + L_{21}L_{22}\cdots L_{2n} + \cdots + L_{m1}L_{m2}\cdots L_{mn}. \end{aligned}$$

易知 $L_{11}L_{12}\cdots L_{1n} = L_1$, $L_{21}L_{22}\cdots L_{2n} = L_2$, \dots , $L_{m1}L_{m2}\cdots L_{mn} = L_m$. 因为 $L_{11}, L_{21}, \dots, L_{mn}$ 中有 $m-1$ 个是 A 的单纯理想, 而单纯理想是两边理想, 所以 L_1, \dots, L_m 中有 $m-1$ 个是 A 的两边理想. 再由 $L_i \subset A_i$ 及 A_i 是单纯理想, 它不含非零的真两边理想, 因此这 $m-1$ 个 L_i 或者是零, 或者是 A_i .

充分性 设 L 是 A 的任意左理想, $L = L_1 + \cdots + L_m$, 其中 $L_i = A_i \cap L$ ($i = 1, \dots, m$). 不失一般性, 不妨设前 $m-1$ 个 L_i 等于零或 A_i . 取 $P_i = A_1 + \cdots + A_{i-1} + L_i + A_{i+1} + \cdots + A_m$, 由文献[1]的定理3, P_i 是素理想 ($i = 1, \dots, m$). 注意到 $A_i A_j = (0)$ ($i \neq j$), 便有

$$P_1 \cdots P_{m-1} P_m = L_1 A_1 \cdots A_1 + \cdots + A_{m-1} \cdots A_{m-1} L_{m-1} A_{m-1} + A_m \cdots A_m L_m.$$

因为 $L_i = (0)$ 或 A_i ($i = 1, \dots, m-1$), 所以

$$L_1 A_1 \cdots A_1 = L_1, \dots, A_{m-1} \cdots A_{m-1} L_{m-1} A_{m-1} = L_{m-1}.$$

因为 L_m 为 A 的左理想, 所以 $A_m \cdots A_m L_m \subset L_m$, 再由半单纯环的单纯理想 A_m 有单位元, $A_m \supset L_m$ 知 $A_m \cdots A_m L_m \supset L_m$. 因此 $A_m \cdots A_m L_m = L_m$.

综上, 有 $P_1 \cdots P_{m-1} P_m = L_1 + \cdots + L_m = L$, 证毕.

由定理1可得到下面的推论:

* 1992年4月9日收到, 1994年4月7日收到修改稿.

- 推论 1** 半单纯环的任意两边理想都可以分解为有限个素理想的乘积.
- 推论 2** 设 N 为环 A 的幂零两边理想, 则 A 的包含 N 的左理想 L 可分解为有限个素理想的乘积的充分必要条件是 L/N 可分解为 A/N 中有限个素理想的乘积.
- 推论 3** 设环 A 满足左理想极小条件, 其根为 N , 则 A 的含 N 的任意左理想必可分解为有限个素理想之积.
- 定理 2** 设 A 为半单纯的交换环, 则其中任意理想 W 皆可分解为有限个素理想之积, 并且除单位因子外, 分解是唯一的.

参 考 文 献

- [1] 李希民, 极小条件环中素理想的结构和左理想的素理想分解, 东北数学 5(2), 1989, 240—241.
- [2] 谢邦杰, 抽象代数学, 上海科学技术出版社, 1984, 490—493.
- [3] E. Artin, C. J. Nesbitt, R. M. Thrall, *Ring with minimum condition*, Princeton University Press, Princeton, 1946, 27—31.

The Prime Ideal Decomposition of a Left Ideal in Rings with Minimum Condition

Wang Yuanjin

(Dept. of Math., Liaoning Normal University, Dalian 116022)

Abstract

In this paper we give the decompositon for a left ideal as a finite produce of prime left ideals in a ring with minimum condition, and prove uniqueness of decomposition in commutative semisimple rings.

Keywords rings with minimum condition, prime left ideal, decomposition of divisor.

(接 156 页)

参 考 文 献

- [1] 陈廷祥, 关于群的二次群, 数学的实践与认识, 1984, 第 3 期.
- [2] 田春林, 有限可分群与二次闭群, 辽宁师范大学学报, 1990, 第 4 期.
- [3] 张远达, 有限群构造, 科学出版社, 1982.