Banach 空间上范数的各种 k 光滑性*

曹温淳
（长沙水利电力师范学院，长沙 410077）

摘要 本文中，作者提出了 k 很光滑的概念，并研究了它和 k 光滑，弱 Hahn-Banach 光滑以及 RNP 之间的关系；还讨论了 k 光滑性和 k 强光滑性（kSS）的一些等价条件.

关键词 k 很光滑，k 光滑，弱 Hahn-Banach 光滑，RNP.
分类号 AMS(1991) 46B20/CCL O177.3

对任意自然数 k，作者提出了 k 很光滑（kVS）的概念，并证明了 k 很光滑的充要条件是 k 光滑（kS）且弱 Hahn-Banach 光滑（w(H－B)S），因此它的对偶空间有 RNP. 它推广了[3]中的一个结果. 在本文中，作者也给出了南朝勋和王建华提出的 k 光滑性（kS）和 k 强光滑性（kSS）的一些等价条件以及对偶空间的 k 一致凸，wk 一致凸和 w^*k 一致凸的一些充要条件.

以下设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$(X^*,\|\cdot\|_*)$ 是它的对偶空间，$U(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示 X 中的闭单位球和单位球面. $\Sigma: S(X)\to 2^{S(X^*)}$ 表支撑映象，而 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$ 表支撑函数. 另外，$\Delta(\{x_i\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^*\}_{j=1}^{k})$ 表示行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^*(x_1) & x_1^*(x_2) & \cdots & x_1^*(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k^*(x_1) & x_k^*(x_2) & \cdots & x_k^*(x_{k+1}) \end{vmatrix},$$

而 $V(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 表示 $\sup\limits_{\substack{x_j^*\in S(X^*)\\ 1\leq j\leq k}}\Delta(\{x_i\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^*\}_{j=1}^{k})$. 对于 $x\in X$，$\hat{x}$ 表示 x 在 X^{**} 中的典则象，等等.

引理 1 (i) 如果 $\Delta(\{x_i\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^*\}_{j=1}^{k})=0$ $(\forall\ x_j^*\in S(X^*), j=1,\cdots,k)$，则 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 线性相关；

(ii) 如果 $\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{x}_j\}_{j=1}^{k})=0$ $(\forall\ x_j\in S(X), j=1,\cdots,k)$，则 $x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*$ 线性相关. 反之，如果 $x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*\in\Sigma(x)$ 线性相关，则 $\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k})=0$ $(\forall\ x_j^{**}\in S(X^{**}), j=1,\cdots,k)$.

引理 2（[1]定理 5 的证明） 设 k 是自然数. 若 $S(X)$ 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对（范）列紧的，则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意自然数 m 和任意 $x\in S(X)$ 有 $m<n_1(m)<\cdots<n_k(m)$ 满足 $V(x, x_{n_1(m)},\cdots,x_{n_k(m)})>\varepsilon_0$.

定理 1 下面各条件互相等价：

* 1992年6月27日收到. 93年4月4日收到修改稿.

(i) $x\in S(X)$是$\|\cdot\|$的k光滑点.

(ii) $x_{in}^*\in S(X^*)$和$x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1\ (i=1,\cdots,k+1)$蕴含对$S(X)$中所有$\{y_j\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

(iii) $x^*\in\Sigma(x)$, $x_{in}^*\in S(X^*)$和$x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1\ (i=1,\cdots,k)$蕴含对$S(X)$中所有$\{y_j\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{x^*\}\cup\{x_{in}^*\}_{i=1}^k,\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

(iv) 对任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$和$S(X)$中任意$\{y_i\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\to 0(\max_i\|x_i-x\|\to 0).$$

(v) 对任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^k$, 任意$x^*\in\Sigma(x)$和$S(X)$中任意$\{y_i\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{x_i^*\}\cup\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^k,\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\to 0(\max_i\|x_i-x\|\to 0).$$

证明 (i)⇒(ii). 设$x_{in}^*\in S(X^*)$, $x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1\ (i=1,\cdots,k+1)$. 由$\{x_{in}^*\}_{n=1}^\infty$的相对$w^*$紧性$(i=1,\cdots,k+1)$知对$\{n\}_{n=1}^\infty$的任意子列$\{n_k\}_{k=1}^\infty$存在$\{x_{in_k}^*\}_{k=1}^\infty$的子网$\{x_{in_{k(\alpha)}}^*\}w^*$收敛于某(与$\{n_k\}_{k=1}^\infty$有关)$x_i^*\in\Sigma(x)\ (i=1,\cdots,k+1)$. 于是对$S(X)$中任意$\{y_j\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{x_{in_{k(\alpha)}}^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\xrightarrow{\alpha}\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)=0.$$

由此知$\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(ii)⇒(iii)⇒(v)和(ii)⇒(iv)⇒(v)显然, 因为$x^*(x)=1$且当$x_i\to x$时$\sigma_i(x_i)(x)\to 1$.

(v)⇒(i). 对$\Sigma(x)$中任意$\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1}$, 在(v)中取$x_i=x$, $x^*=x_1^*$, $\sigma_i(x_i)=x_{i+1}^*\ (i=1,\cdots,k)$得, 对$S(X)$中所有$\{y_j\}_{j=1}^k$有$\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)=0$. 故$x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*$线性相关. 证毕.

定义 1 若$x\in S(X)$是$\|\cdot\|$的k光滑点并且$x_n^*\in S(X^*)$和$x_n^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$蕴含$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$相对$w$紧, 则称$x$为$\|\cdot\|$的$k$很光滑点. 若$S(X)$上所有点都是$\|\cdot\|$的$k$很光滑点, 则称$\|\cdot\|$是$k$很光滑的($k$VS).

下面要用到分解式$X^{**}=\hat{X}\oplus X^\perp$, 其中$X^\perp$表示$X^{***}$中与$\hat{X}$正交的元素全体.

定理 2 下列各条件互相等价:

(i) $\dim[\Sigma(x)]=k$且$x\in S(X)$是$\|\cdot\|$的k很光滑点.

(ii) $\dim[\Sigma(x)]=k$且$x_{in}^*\in S(X^*)$和$x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1\ (i=1,\cdots,k+1)$蕴含对$S(X^{**})$中任意$\{x_j^{**}\}_{j=1}^\infty$有$\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(iii) $\dim[\Sigma(x)]=k$且$x_{in}^*\in\Sigma(x)$, $x_{in}^*\in S(X^*)$和$x^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1\ (i=1,\cdots,k+1)$蕴含对$S(X^{**})$中任意$\{x_j^{**}\}_{j=1}^k$有$\Delta(\{x^*\}\cup\{x_{in}^*\}_{i=1}^k,\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(iv) $\dim[\Sigma(x)]=k$且对任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$和$S(X^{**})$中任意$\{x_j^{**}\}_{j=1}^k$有

$$\Delta(\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0\ (\max_i\|x_i-x\|\to 0);$$

(v) $\dim[\Sigma(x)]=k$且对任意$x^*\in\Sigma(x)$, 任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^k$和$S(X^{**})$中任意$\{x_j^{**}\}_{j=1}^k$有$\Delta(\{x^*\}\cup\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^k,\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0\ (\max_i\|x_i-x\|\to 0)$.

(vi) $\dim[\Sigma(x)]=k$且$\widehat{\Sigma(x)}=\Sigma^{**}(\hat{x})$.

证明 (i)⇒(vi). 设 $x_{in}^{***}\in S(X^{***})$ 且 $x_{in}^{***}(\hat{x})\xrightarrow{n\to\infty}1$ $(i=1,\cdots,k+1)$. 在 $S(X^{**})$ 中任取 $\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k}$. 因 $\widehat{U(X^*)}$ 在 $U(X^{***})$ 中 w^* 稠，存在 $x_{in}^*\in U(X^*)$ 使得 $(x_{in}^{***}-\hat{x}_{in}^*)(\hat{x})\xrightarrow{n\to\infty}0$ $(i=1,\cdots,k+1)$ 且

$$\Delta(\{x_{in}^{***}\}_{i=1}^{k+1},\{\widehat{x_j^{**}}\}_{j=1}^{k})-\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1})\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

易见 $\|x_{in}^*\|_*\xrightarrow{n\to\infty}1$，所以可以认为 $x_{in}^*\in S(X^*)$. 任取 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列（仍记为 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. 由条件知，对所有 i $\{x_{in}^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对 w 列紧的，故存在子列 $\{\tilde{x}_{in}^*\}_{n=1}^{\infty}w$ 收敛于某 $x_i^*\in\Sigma(x)$ $(i=1,\cdots,k+1)$. 于是（因为 $\dim[\Sigma(x)]=k$）

$$\Delta(\{\tilde{x}_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k})\xrightarrow{n\to\infty}\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k})=0.$$

由此知 $\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k})\xrightarrow{n\to\infty}0$. 因而 $\Delta(\{x_{in}^{***}\}_{i=1}^{k+1},\{\widehat{x_j^{**}}\}_{j=1}^{k})\xrightarrow{n\to\infty}0$. 这说明 $\hat{x}$ 是 $\|\cdot\|_{**}$ 的 k 光滑点（定理 1）. 因 $\widehat{\Sigma(x)}\subset\Sigma^{**}(\hat{x})$，故 $\widehat{\Sigma(x)}=\Sigma^{**}(\hat{x})$.

(vi)⇒(ii) 由定理 1 立得. (ii)⇒(iii)⇒(v) 和 (ii)⇒(iv)⇒(v) 显然.

(v)⇒(i). 设 $x_n^*\in S(X^*)$ 且 $x_n^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$，即 $\widehat{x_n^*}(\hat{x})\xrightarrow{n\to\infty}1$. 因 $\{\widehat{x_n^*}\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意子网 $\{\widehat{x_{n(\alpha)}^*}\}$ 在 X^{***} 中相对 w^* 紧，必存在子网的子网 $\{\widehat{x_{n\alpha(\beta)}^*}\}$ w^* 收敛于某 $\hat{x}^*+x^{\perp}\in\Sigma^{**}(\hat{x})$. 若能证明 $x^{\perp}=0$，则 $\{x_{n[\alpha(\beta)]}^*\}w$ 收敛于 $x^*\in\Sigma(x)$. 于是 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 相对 w 紧.

现在证明 $x^{\perp}=0$. 在 $\Sigma(x)$ 中选取 k 个线性无关元 $y_1^*,\cdots,y_k^*$. 因 $x_n^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$，由推广的 Bishop-Phelps 定理[2]知，存在 $z_n\in S(X)$ 和 $z_n^*\in\Sigma(z_n)$ 使 $z_n\neq z_m$（若 $n\neq m$）且 $\|z_n-x\|\xrightarrow{n\to\infty}0$，$\|z_n^*-x_n^*\|_*\xrightarrow{n\to\infty}0$. 取支撑函数 σ 使 $\sigma(z_n)=z_n^*$ $(n=1,2,\cdots)$. 显然 $\{\hat{z}_{n[\alpha(\beta)]}^*\}$ 也 w^* 收敛于 $\hat{x}^*+x^{\perp}$. 由假设，对 $S(X^{**})$ 中任意 $\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k}$ 有

$$\begin{aligned}\Delta(\{\widehat{y_i^*}\}_{i=1}^{k}\cup\{\widehat{x^*}+x^{\perp}\},\{\widehat{x_j^{**}}\}_{j=1}^{k})&=\lim_{\beta}\Delta(\{\widehat{y_i^*}\}_{i=1}^{k}\cup\{\widehat{z_{n[\alpha(\beta)]}^*}\},\{\widehat{x_j^{**}}\}_{j=1}^{k})\\&=\lim_{\beta}\Delta(\{y_i^*\}_{i=1}^{k}\cup\{\sigma(z_{n[\alpha(\beta)]})\},\{x_j^{**}\}_{j=1}^{k})=0.\end{aligned}$$

这说明 $\widehat{y_1^*},\cdots,\widehat{y_k^*},\widehat{x^*}+x^{\perp}$ 线性相关. 由 $\widehat{x^*}$ 与 $x^{\perp}$ 的线性无关性及 $\widehat{y_1^*},\cdots,\widehat{y_k^*}$ 的线性无关性知 $x^{\perp}=0$. 证毕.

Mark A. Smith 和 Francis Sullivan 在[3]中引进了弱 Hahn-Banach 光滑[w(H−B)S]概念并证明了 $\|\cdot\|$ 是 VS 的充要条件为 $\|\cdot\|$ 是 S 的和 w(H−B)S 的. 下面定理推广了这个结果.

定理 3 $\|\cdot\|$ 是 kVS 的充要条件为 $\|\cdot\|$ 是 kS 的和 w(H−B)S 的 $(k=1,2,\cdots)$.

证明 必要性. 任取 $x\in S(X)$ 和 $x^*\in\Sigma(x)$. 若 $\widehat{x^*}+x^{\perp}\in S(X^{**})$，则由定理 2 知 $\widehat{x^*}+x^{\perp}\in\Sigma^{**}(\hat{x})=\widehat{\Sigma(x)}$，因而 $x^{\perp}=0$. 所以 $\|\cdot\|$ 是 w(H−B)S 的.

充分性. 任取 $x\in S(X)$ 和 $\widehat{x^*}+x^{\perp}\in\Sigma(\hat{x})$. 则 $x^*\in\Sigma(x)$. 由假设知 $x^{\perp}=0$. 故 $\Sigma^{**}(\hat{x})=\widehat{\Sigma(x)}$. 由定理 2 知 $\|\cdot\|$ 是 kVS 的，证毕.

定理 4 若 $\|\cdot\|$ 是 kVS 的，则 $\|\cdot\|_*$ 有 RNP.

证明 因 w(H−B)S 空间的对偶空间有 RNP，见[3].

由定理 3 自然要问：当 kS 性取消后定理是否仍成立？回答是肯定的.

定理 5 下面两个条件互相等价：

(i) $\|\cdot\|$ 是 w(H−B)S 的.

(ii) $x\in S(X)$, $x_n^*\in S(X^*)$和 $x_n^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$ 蕴含$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$相对 w(列)紧.

证明 (ii)⇒(i). 任取 $x\in S(X)$和 $x^*\in \Sigma(x)$. 若 $\hat{x}^*+x^\perp\in S(X^{***})$, 则存在 $D(X^*)$中网 $\hat{x}_a^*\xrightarrow{w^*}\hat{x}^*+x^\perp$. 易见 $\|x_a^*\|_*\xrightarrow{a}1$, 故可以认为 $\|x_a^*\|_*=1(\forall\ a)$. 取 $a_1<a_2<\cdots$ 使 $|x_a^*(x)-1|<\frac{1}{n}(\forall\ a>a_n; n=1,2\cdots)$. 若存在 $a_0>a_n(\forall\ n)$则易见当 $a>a_0$ 时 $x_a^*\in\Sigma(x)$. 故存在子网 $x_{a(\beta)}^*\xrightarrow{w}\hat{x}^*+x^\perp\in\Sigma(x)$ (因 $\Sigma(x)$ w 紧), 于是 $x^\perp=0$. 若对任意 a 有 $n=n(a)$使 $a_n>a$, 则存在子列$\{x_{a_n}^*\}_{n=1}^\infty$的子列 w 收敛于 $\hat{x}^*+x^\perp\Sigma(x)$, 仍有 $x^\perp=0$.

(i)⇒(ii). 设 $x\in S(X)$, $x_n^*\in S(X^*)$且 $x_n^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$. 因$\{\hat{x}_n^*\}_{n=1}^\infty$的任意子网$\{\hat{x}_{n(a)}^*\}$都含子网的子网$\{\hat{x}_{n[a(\beta)]}^*\}$ w^* 收敛于某 $\hat{x}^*+x^\perp\in\Sigma^*(\hat{x})$. 易见 $x^*\in\Sigma(x)$, 故 $x^\perp=0$, 而 $x_{n[a(\beta)]}^*\xrightarrow{w}x^*$. 这表明$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$相对 w(列)紧. 证毕.

定理 6 下列各条件互相等价:

(i) $x\in S(X)$是$\|\cdot\|$的 k 强光滑点.

(ii) $x_{in}^*\in S(X^*)$和 $x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1(i=1,\cdots,k+1)$蕴含 $V(x_{1n}^*,\cdots,x_{k+1n}^*)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(iii) $x^*\in\Sigma(x)$, $x_{in}^*\in S(X^*)$和 $x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1(i=1,\cdots,k)$蕴含 $V(x^*,x_{1n}^*,\cdots,x_{kn}^*)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(iv) 对任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$有 $V(\sigma_1(x_1),\cdots,\sigma_{k+1}(x_{k+1}))\to0$ $(\max_i\|x_i-x\|\to0)$.

(v) 对任意 $x^*\in\Sigma(x)$和任意支撑函数系$\{\sigma_i\}_{i=1}^k$有

$$V(x^*,\sigma_1(x_1),\cdots,\sigma_k(x_k))\to0\ (\max_i\|x_i-x\|\to0).$$

证明 (ii)⇒(iii)⇒(v)和(ii)⇒(iv)⇒(v)显然.

(v)⇒(i). 对 $\Sigma(x)$中任意$\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1}$有 $V(x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*)=0$[在(v)中取 $x^*=x_{k+1}^*$, $x_i=x$, $\sigma_i(x_i)=x_i^*$], 所以 $x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*$ 线性相关. 设 $x_n^*\in S(X^*)$, $x_n^*(x)\to1$. 如果$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$不是相对紧的, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 m 和任意 $x^*\in\Sigma(x)$一定有 $m<n_1(m)<\cdots<n_k(m)$满足 $V(x^*,x_{n_1(m)}^*,\cdots,x_{n_k(m)}^*)\geqslant2\varepsilon_0$. 由推广的 Bishop-Phelps 定理[2]知, 存在 $y_n\in S(X)$, $y_n^*\in\Sigma(y_n)$使得 $y_n^*=y_m^*$(若 $y_n=y_m$), $\|y_n-x\|\to0$且 $\|y_n^*-x_n^*\|_*\to0$. 于是存在 $N>0$ 使得 $V(x^*,y_{n_1(m)}^*,\cdots,y_{n_k(m)}^*)>\varepsilon_0(m>N)$. 这与(v)矛盾, 因可以取支撑函数 σ_i 满足 $\sigma_i(y_{n_i(m)})=y_{n_i(m)}^*(i=1,\cdots,k)$.

(i)⇒(ii). 设 $x_{in}^*(x)\xrightarrow{n\to\infty}1(i=1,\cdots,k+1)$, 则$\{n\}_{n=1}^\infty$的任意子列都含子列的子列$\{n(s)\}_{s=1}^\infty$使得$\{x_{in(s)}^*\}_{s=1}^\infty$收敛于某 $x_i^*\in\Sigma(x)(i=1,\cdots,k+1)$. 因 $x_1^*,\cdots,x_{k+1}^*$ 线性相关, 易证

$$\begin{aligned}&V(x_{1n(s)}^*,\cdots,x_{k+1n(s)}^*)\\&=\sup_{\substack{x_j^{**}\in S(X^{**})\\1\leqslant j\leqslant k}}|\Delta(\{x_{in(s)}^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)-\Delta(\{x_i^*\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)|\\&\leqslant(k+1)!\sum_{i=1}^{k+1}\|x_{in(s)}^*-x_i^*\|_*\xrightarrow{s\to\infty}0.\end{aligned}$$

因此 $V(x_{1n}^*,\cdots,x_{k+1n}^*)\xrightarrow{n\to\infty}0$. 证毕.

定义 2 如果 $x_{in}^*\in S(X^*)$和 $\|x_{1n}^*+\cdots+x_{k+1n}^*\|_*\xrightarrow{n\to\infty}k+1$ 蕴含对 $S(X)$中任意$\{x_j\}_{j=1}^k$都有 $\Delta(\{x_{in}^*\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{x}_j\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$, 则称$\|\cdot\|_*$是 w^* 一致 k 凸的(w^*kUR).

定义 3 如果 $x_{in}\in S(X)$ 和 $\|x_{1n}+\cdots+x_{k+1n}\|\xrightarrow{n\to\infty}k+1$ 蕴含对 $S(X^*)$ 中任意 $\{x_j^*\}_{j=1}^k$ 有 $\Delta(\{x_{in}\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^*\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$，则称 $\|\cdot\|$ 是弱一致 k 凸的 (wkUR).

用类似的方法还可以证明下面三定理.

定理 7 下列各条件互相等价：

(i) $\|\cdot\|_*$ 是 w^*kUR 的.

(ii) 对 $S(X)$ 上任意支撑函数系 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$ 和 $S(X)$ 中任意 $\{y_j\}_{j=1}^k$ 有 $\Delta(\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j\}_{j=1}^k)\to 0$ $(\max\limits_{i,s}\|x_i-x_s\|\to 0)$.

定理 8 下面各条件互相等价：

(i) $\|\cdot\|_*$ 是 wkUR 的.

(ii) 对 $S(X)$ 上任意支撑函数系 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$ 和 $S(X^{**})$ 中任意 $\{x_j^{**}\}_{j=1}^k$ 有 $\Delta(\{\sigma_i(x_i)\}_{i=1}^{k+1},\{x_j^{**}\}_{j=1}^k)\to 0$ $(\max\limits_{i,s}\|x_i-x_s\|\to 0)$.

(iii) $x_n\in S(X)$，$x_{in}^{***}\in S(X^{***})$ 和 $x_{in}^{***}(\hat{x}_n)\xrightarrow{n\to\infty}1$ $(i=1,\cdots,k+1)$ 蕴含对 $S(X^{**})$ 中所有 $\{y_j^{**}\}_{j=1}^k$ 有 $\Delta(\{x_{in}^{***}\}_{i=1}^{k+1},\{\hat{y}_j^{**}\}_{j=1}^k)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

定理 9 下面两条件互相等价：

(i) $\|\cdot\|_*$ 是 kUR 的.

(ii) 对 $S(X)$ 上任意支撑函数系 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$ 有 $V(\sigma_1(x_1),\cdots,\sigma_{k+1}(x_{k+1}))\to 0$ $(\max\limits_{i,s}\|x_i-x_s\|\to 0)$.

参 考 文 献

[1] 南朝勋、王建华，k 凸性和 k 光滑性，数学年刊(A)11:3(1990)，321—324.

[2] B. Bollobas, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc., 2(1970), 181—182.

[3] Mark A. Smith and Francis Sullivan, *Extremely Smooth Banach Spaces*, Preprint Paper, 125—137.

Various k-Smoothnesses of Norms on Banach Spaces

Cao Wenchun

(Changsha Normal College of Water Resources and Elec. Powers)

Abstract

We define a concept of very k-smoothness (kVS) for every natural number k, and gives the necessary and sufficient conditions for very k- smoothness to be k-smoothness and weak Hahn-Banach smoothness ($w(H-B)S$). The results extend a conclusion of [3]. Moreover, we give several equivalent conditions for k-smoothness, strong k-smoothness, uniform k-convexity, weak uniform k-convexity and weak uniform k-convexity.

Keywords k-smoothness, very k-smoothness, Hahn-Banach smoothness.